1　微分積分学 II (2013/09/19): 色々な関数の不定積分

原始関数と不定積分

定義 1.1. 関数 $f(x)$ に対して, $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の <u>**原始関数**</u> という.

命題 1.2. 区間 I 上で定義された関数 $F(x), G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば, ある定数 C を用いて

$$G(x) = F(x) + C \tag{1.1}$$

と表される.

上の命題より, $f(x)$ のすべての原始関数は, $f(x)$ のある原始関数 $F(x)$ とある定数 C を用いて, $F(x) + C$ と表されることが分かる.

定義 1.3. $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (のひとつ) とする. このとき

$$F(x) + C \quad (C \text{ は定数}) \tag{1.2}$$

を $f(x)$ の <u>**不定積分**</u> といい,

$$\int f(x)dx \tag{1.3}$$

と表す.

注意 1.4. $f(x)$ の不定積分を求めることを, $f(x)$ を <u>**積分する**</u> といい, そのとき定数 C を特に <u>**積分定数**</u> という. この講義では特に断らない限り C は積分定数を表すものとする.

注意 1.5. $\displaystyle\int 1dx, \int \frac{1}{f(x)}dx$ をそれぞれ $\displaystyle\int dx, \int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある.

命題 1.6. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$　　(2) $\displaystyle\int F'(x)dx = F(x) + C.$

命題 1.7. 次が成り立つ:

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

2　微分積分学 II (2013/09/19): 色々な関数の不定積分 (続き)

簡単な関数の不定積分公式

次の不定積分の公式は微分の公式よりすぐに導かれる (不定積分の計算はこれらの基本的な関数の不定積分に帰着させるのが原則である).

命題 2.1. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} = \log|x| + C,$

(2) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C\ (a > 0, a \neq 1),$

(3) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C,$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$

次の公式も不定積分の計算をする上でよく用いられる.

命題 2.2. 次が成り立つ:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C. \tag{2.4}$$

例 2.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C, \qquad$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\log|x^2+a| + C.$

命題 2.4. $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0). \tag{2.5}$$

例 2.5. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3} + C, \qquad$ (2) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

3　微分積分学 II (2013/09/26): 置換積分

前回の命題 2.2 や 2.4 は次の置換積分と呼ばれるものの特別な場合である.

定理 3.1. 次が成り立つ:

(1) $x = g(t)$ のとき, $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$,

(2) $g(x) = t$ のとき, $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$.

注意 3.2. (1) において, $x = g(t)$ なので "形式的" に

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = g'(t)dt$$

が成り立つと考える. すると (1) の左辺に $x = g(t), dx = g'(x)dt$ を代入すると右辺が得られる. 置換積分では, このような "形式的" な式変形を利用すると有用である.

例 3.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + C,\qquad (t = x^2 \text{ または } t = 1 - x^2)$

(2) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C,\qquad (t = \cos x)$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.\qquad (t = \log x)$

注意 3.4. 例 3.3 の (1), (2) のように被積分関数が

- (x^2 の関数) $\times\, x$ のときは $t = x^2$,
- ($\cos x$ の関数) $\times \sin x$ のときは $t = \cos x$

とおくと有効である.

命題 3.5. 次が成り立つ:

(1) $a > 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C,\quad (x = at \text{ または } x = a\sin t)$

(2) $a \neq 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.\quad (x = at \text{ または } x = a\tan t)$

例 3.6. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2} + C,\quad$ (2) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 2x + 5}dx = \arctan\frac{x-1}{2} + C.$

4　微分積分学 II (2013/10/03): 部分積分

定理 4.1. 次が成り立つ:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{4.6}$$

注意 4.2. 部分積分する際には「何を積分し, 何を微分するか」を決めることが重要である. 一般的には, 被積分関数が

- (多項式) × (三角・指数関数) のときは, 三角・指数関数を積分 (多項式を微分),
- (多項式) × (対数関数) のときは, 多項式を積分 (対数関数を微分)

するとよい.

例 4.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int xe^x dx = (x-1)e^x + C,$　　(2) $\displaystyle\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C.$

定理 4.1 において $g(x) = x$ とすると, 次が得られる.

系 4.4. 次が成り立つ:

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx. \tag{4.7}$$

命題 4.5. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \log x dx = x(\log x - 1) + C,$

(2) $\displaystyle\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C,$　(ヒント: 例 2.3 (2))

(3) $\displaystyle\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$　(ヒント: 例 3.3 (1))

また次の不定積分は, 部分積分を繰り返し用いることで求めることができる.

例 4.6. $I := \displaystyle\int e^x \sin x dx$ とおくと, 次が成り立つ:

(1) $I = e^x(\sin x - \cos x) - I,$

(2) $I = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

5　微分積分学 II (2013/10/10): 分数式の積分

分数関数 $R(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ は以下の手順で積分することができる．以下, $f(x)$ と $g(x)$ は共通因数を持たず, (必要なら割り算をして) $f(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より小さいとする．

step 1. 分母 $g(x)$ を因数分解する．実際, 多項式 $g(x)$ は,

$$(x-a)^m \qquad \text{と} \qquad (x^2+bx+c)^n$$

の形をした式の積に因数分解できる (ただし, 判別式 $b^2-4c<0$).

step 2. 分数関数 $R(x)$ を部分分数分解する．実際, $g(x)$ を因数分解を元に, $R(x)$ は,

$$A \cdot \frac{1}{(x-a)^k} \quad (k=1,\dots,m) \qquad \text{と} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l} \quad (l=1,\dots,n)$$

の形をした式の和に分解できる (**係数比較法**や**数値代入法**を使う)．さらに, 後者は

$$B' \cdot \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^l} \qquad \text{と} \qquad C' \cdot \frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \quad (l=1,\dots,n)$$

の形をした式の和に分解できる．

step 3. 各項を積分する．実際, step 2. より $R(x)$ は

$$A \cdot \frac{1}{(x-a)^k}, \qquad B' \cdot \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}, \qquad C' \cdot \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}$$

の形をした式の和に分解できるので, 次の補題から積分を求めることができる．

補題 5.1. 次が成り立つ:

(A) $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ は $x-a=t$ とおくと置換積分できる．

(B) $\dfrac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}$ は $x^2+bx+c=t$ とおくと置換積分できる,

(C) $\dfrac{1}{x^2+bx+c}$ は分母平方完成することで命題 3.5 が使える．

6　微分積分学 II (2013/10/17): 分数式の積分 (続き)

具体的な関数で求める場合も, 上の手順をたどればよい.

例 6.1. $\dfrac{x+9}{x^2-2x-3}$ について, 次が成り立つ:

(1) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

(2) $\dfrac{x+9}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+1}$ とすると, $A=3$, $B=-2$,

(3) $\displaystyle\int\frac{x+9}{x^2-2x-3}dx=\log\frac{|x-3|^3}{(x+1)^2}+C.$

例 6.2. $\dfrac{2x+3}{x^2(x+1)}$ について, 次が成り立つ:

(1) $\dfrac{2x+3}{x^2(x+1)}=\left(\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}\right)+\dfrac{C}{x+1}$ とすると, $A=-1$, $B=3$, $C=1$,

(2) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2(x+1)}dx=\log\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{3}{x}+C.$

例 6.3. $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$ について, 次が成り立つ:

(1) $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とすると, $A=1$, $B=-1$, $C=1$,

(2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x^2+1)}dx=\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\arctan x+C.$

また分母の次数の方が小さい場合は, 割り算をして分子の次数を下げることで上の場合に帰着することで積分を求めることができる.

例 6.4. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+C,$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{x^3+x}dx=x-\log|x|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\arctan x+C.$

7　微分積分学 II (2013/10/17): 三角関数の分数式

三角関数の不定積分は置換積分によって求めることできる場合がある.

命題 7.1. 次が成り立つ:

(1) $\sin x = t$ とおくと, $\displaystyle\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(t)dt$,

(2) $\cos x = t$ とおくと, $\displaystyle\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(t)dt$.

例 7.2. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \log(1+\sin x) + C$,　　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.

三角関数の分数式の不定積分については, 置換積分によって分数式の不定積分に帰着させることで求めることができる.

補題 7.3. $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと, 次が成り立つ:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

命題 7.4. 次が成り立つ: $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例 7.5. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \tan\frac{x}{2} + C$,　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$,

注意 7.6. 被積分関数が $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$ からなる分数式の場合は, 次の置換積分も有用である: $\tan x = t$ とおくと,

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)dx = \int R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

例 7.7. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$,　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$.

8　微分積分学 II (2013/10/24): 無理式の積分

無理式の不定積分のうち, 置換積分によって求めることができるものをいくつか挙げる.

例 8.1. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C, \quad (x = \sqrt{2}t)$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx = -\sqrt{2-x^2} + C, \quad (2-x^2 = t)$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3} - 4\sqrt{2-x} + C. \quad (2-x = t)$

無理式を含む分数式の不定積分についても, いくつかの場合には置換積分によって分数式の不定積分に帰着させることで求めることができる. ここでは, $\sqrt{ax+b}$ を含む分数式を考える.

命題 8.2. $a \neq 0$ のとき, 次が成り立つ: $\sqrt{ax+b} = t$ とおくと,

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx = \int R(\frac{t^2-b}{a}, t)\frac{2t}{a}dt.$$

例 8.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C,$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

注意 8.4. $\sqrt[n]{ax+b}$ を含む分数式の場合も同様に, $\sqrt[n]{ax+b} = t$ とおくことで不定積分を求めることができる.

例 8.5. 次が成り立つ:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \sqrt[6]{x} + \arctan\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

9 微分積分学 II (2013/11/07): 定積分の計算方法

以下, 特に断らない限り, $f(x)$ を閉区間 I で定義された関数とし, $a, b, c \in I$ とする.

定義 9.1. $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (のひとつ) とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)dx := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a) \tag{9.8}$$

を $f(x)$ の <u>a **から** b **までの定積分**</u> という.

注意 9.2. 命題 1.2 より, 上の定義は原始関数の選び方に依らない (よって $F(x)$ として $f(x)$ の不定積分で $C = 0$ の場合を考えればよい).

ここでは定積分の基本的な性質について調べる. 次は定義からすぐに導かれる.

命題 9.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \qquad \int_a^a f(x)dx = 0,$

(3) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$

(4) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ 　　(すなわち $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数).

また平均値の定理から次が成り立つ.

定理 9.4 (積分の平均値の定理). $a < b$ とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{9.9}$$

を満たす $c\,(a < c < b)$ が存在する.

系 9.5. $f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ を満たすならば,

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx. \tag{9.10}$$

10　微分積分学 II (2013/11/07): 定積分の計算方法 (続き)

定積分の計算は原始関数 (不定積分) の計算に帰着される. 以下は, 基本的な不定積分の計算が導かれる.

例 10.1. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$, (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} - 2$,

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log 2$, (4) $\displaystyle\int_1^2 e^x dx = e^2 - e$,

(5) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx = 2$, (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$.

例 10.2. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan dx = \log\sqrt{2}$, (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = 1 - \frac{\pi}{4}$,

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$, (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$.

例 10.3. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{12}$, (2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3}$.

注意 10.4 (復習). $\arcsin x$, $\arctan x$ はそれぞれ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における $\sin x$, $\tan x$ の逆関数であった. 各値は以下の表を参照せよ.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

11　微分積分学 II (2013/11/14): 定積分の置換積分

定積分の場合も, 不定積分と同様に次の定理 (置換積分) が成り立つ.

定理 11.1. 次が成り立つ:

(1) $x = g(t)$ のとき $a = g(\alpha), b = g(\beta)$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$,

(2) $g(x) = t$ のとき $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.

不定積分の場合と異なり, 定積分の置換積分は置換によって積分区間が変化することに注意する必要がある.

例 11.2. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3dx = \frac{15}{8}$,

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{8}$,

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos xdx = \frac{1}{3}$,

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin xdx = \frac{1}{3}$,

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}$,

(6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\log x)^2}{x}dx = \frac{2}{3}$,

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{3}$,

(8) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{6}$.

例 11.3. $r > 0$ とするとき, 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{1}{3}r^3, \quad (r^2-x^2=t)$

(2) $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{\pi}{4}r^2. \quad (x = r\sin t)$

例 11.4. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx = \frac{2}{3}$,

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx = \frac{2}{3}$.

注意 11.5. 上の例や, 前回の例 10.2 のように, 一般に次が成り立つ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \tag{11.11}$$

12　微分積分学 II (2013/11/14): 定積分の部分積分

定積分の場合も, 不定積分と同様に次の定理 (部分積分) が成り立つ.

定理 12.1. 次が成り立つ:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{12.12}$$

例 12.2. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1,$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = 1,$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = 1,$　　(4) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4},$

(5) $\displaystyle\int_1^e \log x dx = 1,$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.$

命題 12.3. m, n を自然数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}. \tag{12.13}$$

ただし自然数 N に対して, $N! := 1 \times 2 \times \cdots \times N$ と定義する (N の **階乗**).

系 12.4. 次が成り立つ:

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3. \tag{12.14}$$

注意 12.5. $p > 0$, $q > 0$ に対して,

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{12.15}$$

は **ベータ関数** と呼ばれ, 微分積分学では重要な特殊関数のひとつである (命題 12.3 の積分はベータ関数の特別な場合). ただし上の積分は広義積分を含んでいることに注意.

13　微分積分学 II (2013/11/21): 広義積分

これまでの定積分は, 関数 $f(x)$ が積分区間 $[a,b]$ で常に定義される場合に対して考えていた. ここでは, $f(x)$ が $[a,b]$ 内に定義されない点を含むとき, その定積分を考える.

定義 13.1. $(a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{a'\to a+0}\int_{a'}^{b} f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{a'\to a+0}\int_{a'}^{b} f(x)dx \tag{13.16}$$

と定義する.

定義 13.2. $[a,b)$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{b'\to b-0}\int_{a}^{b'} f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{b'\to b-0}\int_{a}^{b'} f(x)dx \tag{13.17}$$

と定義する.

定義 13.3. $a<c<b$ とする. $x=c$ を除いて $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$, $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{13.18}$$

と定義する.

例 13.4. 次が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2,$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$　　(3) $\displaystyle\int_0^e \log x = 0.$

命題 13.5. 次が成り立つ:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha<1) \\ \infty\ (\text{存在しない}) & (\alpha \geqq 1) \end{cases}. \tag{13.19}$$

14　微分積分学 II (2013/11/28): 無限積分

ここでは, 積分区間が無限区間 $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$ の場合に対して, 関数の定積分を考える.

定義 14.1. $[a,\infty)$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{14.20}$$

と定義する.

定義 14.2. $(-\infty,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{14.21}$$

と定義する.

定義 14.3. c を実数とする. $(-\infty,\infty)$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して, 無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\displaystyle\int_c^\infty f(x)dx$ が存在するならば,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \tag{14.22}$$

と定義する (これは c のとり方によらない).

例 14.4. 次が成り立つ:

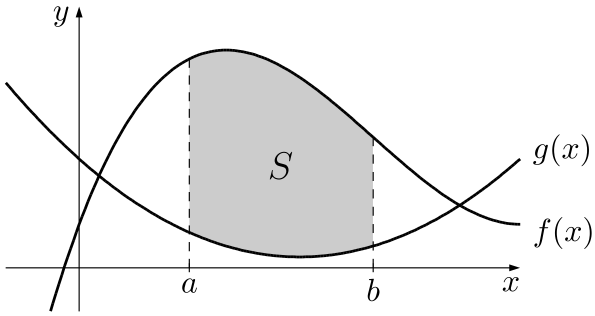
(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1$,　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$,　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x} = 1$,

命題 14.5. 次が成り立つ:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \infty\ (\text{存在しない}) & (\alpha\leqq 1) \end{cases}. \tag{14.23}$$

15　微分積分学 II (2013/11/28): 面積

ここでは 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の面積について考える. 以下, $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とする.



補題 15.1. $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で $f(x) \geqq 0$ を満たすとする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = t$ $(a \leqq t \leqq b)$ で囲まれた領域の面積を $S(t)$ とすると, 次が成り立つ:

$$S'(t) = f(t). \tag{15.24}$$

定理 15.2. $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で $f(x) \geqq 0$ を満たすとする. 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の面積を S とすると, 次が成り立つ:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{15.25}$$

例 15.3. $y = x^2$, x 軸, $x = 1$ で囲まれた領域の面積は $\dfrac{1}{3}$.

定理 15.4. $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で $f(x) \geqq g(x)$ を満たすとする. 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の面積を S とすると, 次が成り立つ:

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx. \tag{15.26}$$

例 15.5. 次が成り立つ:

(1) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \pi$ で囲まれた領域の面積は $1 + \sqrt{2}$,

(2) $y = x^3 - x^2$, $y = x - 1$ で囲まれた領域の面積は $\dfrac{4}{3}$.

16　微分積分学 II (2013/12/05): 体積

ここでは, 立体の体積を定積分を利用して求める. 特に, 曲線 $y = f(x)$, x 軸 および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を考える.

注意 16.1. x に垂直で, x 軸と交わる点の x 座標が c である平面は, $x = c$ で表される.

まず一般に, ある立体の平面 $x = a$, $x = b$ の間にはさまれた部分の体積 V を求める. そこで $a \leqq t \leqq b$ となる t に対して, この立体を平面 $x = t$ で切ったときの切り口の面積を $S(t)$, 2 平面 $x = a$, $x = t$ の間にはさまれた部分の体積を $V(t)$ とする (このとき, $V = V(b)$ に注意).

補題 16.2. 上の設定の下で, 次が成り立つ:

$$V'(t) = S(t). \tag{16.27}$$

定理 16.3. 上の設定の下で, 次が成り立つ:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{16.28}$$

次に回転体の体積を求める. 以下, $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とする.

系 16.4. 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると, 次が成り立つ:

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx. \tag{16.29}$$

例 16.5. $y = x^2$, x 軸, $x = 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は $\dfrac{\pi}{5}$.

例 16.6. 半径 r の球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

17　微分積分学 II (2013/12/05): 曲線の長さ

ここでは, 曲線の長さを定積分を利用して求める. 以下, $f(x)$ は微分可能で, $f'(t)$ が連続であるとする.

定理 17.1. 曲線 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における長さを L とすると, 次が成り立つ:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx. \tag{17.30}$$

例 17.2. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の区間 $[-1, 1]$ における長さは $e - \frac{1}{e}$.

注意 17.3. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ は <u>**双曲線関数**</u> の一種で, $\cosh x$ と表わされる. そのグラフは懸垂線 (カテナリー) と呼ばれ, 密度一様な糸の両端を支えてつり下げたときにできる曲線である.

例 17.4. 半径 r の円周の長さは $2\pi r$.

余談. 面積や体積を考える際には, $f(x)$ は連続関数であると仮定したが, 曲線の長さを考える際には, 連続性の仮定だけでは不十分である. 実際, 有限区間における長さが存在しない (無限大に発散する) 連続関数が存在する.

18　微分積分学 II (2013/12/12): 偏微分

以下, 2 変数関数 $f(x,y)$ について, 特にその偏微分やグラフの接平面について学ぶ. 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の周りで定義されているとする.

定義 18.1. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して ($y=b$ を代入してできる関数 $f(x,b)$ を考え),

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \tag{18.31}$$

が存在するならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で **x-偏微分可能** という. また上の値を **x-偏微分係数** といい, $f_x(a,b)$ で表す.

定義 18.2. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して ($x=a$ を代入してできる関数 $f(a,y)$ を考え),

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \tag{18.32}$$

が存在するならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で **y-偏微分可能** という. また上の値を **y-偏微分係数** といい, $f_y(a,b)$ で表す.

定義 18.3. $f(x,y)$ は点 (a,b) の周りで偏微分可能とする. このとき, 点 (x,y) での偏微分係数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を x,y の関数を考え, それぞれ **x-偏導関数**, **y-偏導関数** とよぶ. また, 偏導関数を求めることを **偏微分する** という.

注意 18.4. $z=f(x,y)$ に対して, x-偏導関数は次の記号で表される (y-偏導関数についても同様):

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad z_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

例 18.5. 次が成り立つ:

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$ のとき, $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=-2y$,

(2) $f(x,y)=x^2ye^{2y}$ のとき, $f_x(x,y)=2xye^{2y}$, $f_y(x,y)=x^2(1+2y)e^{2y}$,

(3) $f(x,y)=\sin(x+2y)$ のとき, $f_x(x,y)=\cos(x+2y)$, $f_y(x,y)=2\cos(x+2y)$,

(4) $f(x,y)=\arctan xy$ のとき, $f_x(x,y)=\dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2y^2}$.

19　微分積分学 II (2013/12/19): 接平面

ここでは, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフの接平面について考える.

注意 19.1. $z = f(x, y)$ は一般には xyz 空間内の曲面である.

定義 19.2. 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で **全微分可能** であるとは,

$$f(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + f(a, b) + R(x, y) \tag{19.33}$$

とするとき,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \tag{19.34}$$

が成り立つような定数 A, B が存在すること.

命題 19.3. $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば, 次が成り立つ:

(1) $f(x, y)$ は点 (a, b) で偏微分可能,

(2) $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$.

注意 19.4. $f(x, y)$ が全微分可能であるための十分条件はいくつか知られている. 例えば, $f(x, y)$ は偏微分可能であり, かつ偏導関数が連続ならば, $f(x, y)$ は全微分可能である (よって, 大抵の関数は全微分可能であると考えてよい).

定理 19.5. $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば, 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面が存在し, その方程式は次で与えられる:

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b). \tag{19.35}$$

例 19.6. 次が成り立つ:

(1) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(a, b) = (1, 2)$ のとき, 接平面は $z = 2x - 4y + 3$,

(2) $f(x, y) = x^2 ye^{2y}$, $(a, b) = (2, \frac{1}{2})$ のとき, 接平面は $z = 2e(x + 4y - 3)$,

(3) $f(x, y) = \sin(x + 2y)$, $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$ のとき, 接平面は $z = x + 2y$,

(4) $f(x, y) = \arctan xy$, $(a, b) = (1, 0)$ のとき, 接平面は $z = y$.

20　微分積分学 II (2014/01/16): 合成関数の偏微分

ここでは, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対して, 合成関数の (偏) 微分を考える.

まず, 変数 x,y がそれぞれ $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ と表されている場合を考える (この場合, 合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ は t を変数とする 1 変数関数である).

定理 20.1. 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能で, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ が t の関数として微分可能ならば，合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ も微分可能であり, 次が成り立つ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{20.36}$$

注意 20.2. 変数を省略せずに書くと, 上記の式は次のようになる (が, 煩雑になるため上のように書くことが多い):

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t), \psi(t)) = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t). \tag{20.37}$$

例 20.3. 次が成り立つ:

(1) $z = x^2 - y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ のとき, $\dfrac{dz}{dt} = -\sin 2t - \cos t$,

(2) $z = xy$, $x = 1 - t^2$, $y = 1 + t^2$ のとき, $\dfrac{dz}{dt} = -4t^3$.

次に, 変数 x,y がそれぞれ $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ と表されている場合を考える (この場合, 合成関数 $z = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ は u, v を変数とする 2 変数関数である).

定理 20.4. 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能で, $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ が u, v の関数として偏微分可能ならば，合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ も偏微分可能であり, 次が成り立つ:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{20.38}$$

例 20.5. 次が成り立つ:

(1) $z = x^2 - y$, $x = 2u - v$, $y = uv$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 8u - 5v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -5u + 2v$,

(2) $z = xy$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 4u^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -4v^3$.