

# 微分積分学 II 自習用問題

(2013/12/19 配布)

- 以下は自習用の練習問題です。レポートにして提出する必要はありません。
- 解答は <http://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lectures/13bibun2.html> に掲載します。

## 7 定積分

問 7.1. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_1^2 x^2 dx$$

$$(2) \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$(4) \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$(5) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(6) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(7) \int_0^1 (2x + 1)^3 dx$$

$$(8) \int_0^1 \sqrt{2x + 1} dx$$

$$(9) \int_0^1 \frac{1}{2x + 1} dx$$

問 7.2. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 e^x dx$$

$$(2) \int_0^1 e^{-3x} dx$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

問 7.3. 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$(2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1 + 4x^2} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$$

# 微分積分学 II 自習用問題

(2013/12/19 配布)

- 以下は自習用の練習問題です。レポートにして提出する必要はありません。
- 解答は <http://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lectures/13bibun2.html> に掲載します。

## 8 定積分の置換積分

問 8.1. 次の定積分を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx & (2) \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx & (3) \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx \\ (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx & (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx & (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx \\ (7) \int_1^e \frac{\log x}{x} dx & (8) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\log x)^2}{x} dx & (9) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \\ (10) \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 4} dx & (11) \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx & *(12) \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx \end{array}$$

## 9 定積分の部分積分

問 9.1. 次の定積分を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 xe^x dx & (2) \int_0^1 xe^{2x} dx & (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\ (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx & (5) \int_0^1 x^2 e^x dx & (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \\ (7) \int_1^e x \log x dx & (8) \int_1^e \log x dx & (9) \int_0^1 \arctan x dx \end{array}$$

問 9.2.  $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$  を利用して、次の定積分を求めよ (符号に注意せよ).

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx & (2) \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx & (3) \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \\ (4) \int_{-1}^2 (x + 1)^2 (x - 2) dx & (5) \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2)^2 dx & (6) \int_{-1}^2 (x + 1)^2 (x - 2)^2 dx \end{array}$$

# 微分積分学 II 自習用問題

(2013/12/19 配布)

- 以下は自習用の練習問題です。レポートにして提出する必要はありません。
- 解答は <http://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lectures/13bibun2.html> に掲載します。

## 10 広義積分

問 10.1. 次の広義積分を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx & (2) \int_0^1 \frac{1}{x^{0.99}} dx & (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ (4) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & (5) \int_0^e \log x dx & *(6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array}$$

## 11 無限積分

問 11.1. 次の無限積分を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx & (2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.01}} dx & (3) \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ (4) \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx & (5) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx & (6) \int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx \\ (7) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx & (8) \int_0^{\infty} x e^{-3x} dx & *(9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \end{array}$$

問 11.2 (発展問題). 自然数  $n$  に対して,

$$\Gamma(n) := \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

とおく.  $\lim_{b \rightarrow \infty} (b^{n-1} e^{-b}) = 0$  に注意して,  $\Gamma(2)$ ,  $\Gamma(3)$  を求めよ. また一般に  $\Gamma(n)$  を求めよ.

# 微分積分学 II 自習用問題

(2013/12/19 配布)

- 以下は自習用の練習問題です。レポートにして提出する必要はありません。
- 解答は <http://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lectures/13bibun2.html> に掲載します。

## 12 面積

問 12.1. 次の直線や曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

- (1)  $y = x^2$ ,  $x$  軸,  $x = 1$ ,  $x = 2$                       (2)  $y = xe^x$ ,  $x$  軸,  $x = 1$
- (3)  $y = \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ),  $x$  軸                      (4)  $y = (x+1)(x-2)^2$ ,  $x$  軸
- (5)  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \pi$                       (6)  $y = e^x$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$
- (7)  $y = x^3 - x^2$ ,  $y = x - 1$                       (8)  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 3 - x$

問 12.2 (発展問題). サイクロイド  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ. (ヒント:  $S = \int_0^{2\pi} y dx$  を置換積分する.)

## 13 体積

問 13.1. 次の直線や曲線で囲まれる図形を,  $x$  軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

- (1)  $y = x^2$ ,  $x$  軸,  $x = 1$                       (2)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x$  軸,  $x = 1$
- (3)  $y = e^x$ ,  $x$  軸,  $x = 1$ ,  $x = 2$                       (4)  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ),  $x$  軸

## 14 曲線の長さ

問 14.1. 次の曲線の長さを求めよ.

- (1)  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )                      (2)  $y = x\sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )
- (3)  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\log x}{2}$  ( $1 \leq x \leq e$ )                      (4)  $y = \sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )
- \* (5)  $y = \log(1-x^2)$  ( $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ )                      \*(6)  $y = \log(\cos x)$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ )