微分積分学 II 自習用問題・解答

7　定積分

問 7.1.

(1) $\dfrac{7}{3}$　(2) $-\dfrac{4}{3}$　(3) $\log 2$

(4) $\dfrac{2}{3}$　(5) $\dfrac{1}{2}$　(6) $2\sqrt{2}-2$

(7) 10　(8) $\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}$　(9) $\dfrac{1}{2}\log 3$

問 7.2.

(1) $e-1$　(2) $-\dfrac{1}{3}\left(e^{-3}-1\right)$　(3) $e-\dfrac{1}{e}$

(4) 1　(5) 1　(6) $\dfrac{\pi}{4}$

(7) $\dfrac{\pi}{4}$　(8) $\dfrac{1}{2}\log 2$　(9) $1-\dfrac{\pi}{4}$

問 7.3.

(1) $\dfrac{\pi}{12}$　(2) $\dfrac{7\pi}{12}$　*(3) $-\dfrac{\pi}{4}$

(4) $\dfrac{\pi}{4}$　(5) $\dfrac{\pi}{3}$　(6) $\dfrac{\pi}{12}$

---

*　問題 **7.3(3)** の被積分関数の分子が -1 になっていたのはタイプミスです．ただ問題としては成立しますので，訂正はしないことにします．

微分積分学 II 自習用問題・解答

8　定積分の置換積分

問 8.1.

(1) $\dfrac{15}{8}$　(2) $\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$　(3) $\dfrac{\pi}{8}$

(4) $\dfrac{1}{3}$　(5) $\dfrac{2}{3}$　(6) $\dfrac{2}{3}$

(7) $\dfrac{1}{2}$　(8) $\dfrac{2}{3}$　(9) $\dfrac{\pi}{3}$

(10) $\dfrac{\pi}{6}$　(11) $\dfrac{8}{3}$　(12) π

9　定積分の部分積分

問 9.1.

(1) 1　(2) $\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$　(3) 1

(4) $\dfrac{\pi}{2}-1$　(5) $e-2$　(6) $\pi-2$

(7) $\cancel{1} \to \dfrac{1}{4}(e^2+1)$　(8) $\cancel{\dfrac{1}{4}} \to 1$　(9) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\log 2}{2}$

問 9.2.

(1) $-\dfrac{4}{3}$　(2) $-\dfrac{9}{2}$　(3) $-\dfrac{4}{3}$

(4) $-\dfrac{27}{4}$　(5) $\dfrac{27}{4}$　(6) $\dfrac{81}{10}$

微分積分学 II 自習用問題・解答

10　広義積分

問 10.1.

(1) 2　(2) 100　(3) 2

(4) $\dfrac{\pi}{2}$　(5) 0　(6) π

11　無限積分

問 11.1.

(1) 1　(2) 100　(3) 1

(4) 1　(5) $\dfrac{\pi}{2}$　(6) $\dfrac{\pi}{4}$

(7) 1　(8) $\dfrac{1}{9}$　(9) π

問 11.2. まず問題 11.1 (7) より, $\Gamma(2) = 1$. 次に,

$$\int_0^b x^2 e^{-x} dx = \Big[-x^2 e^{-x} \Big]_0^b - \int_0^b (-2xe^x)\, dx = -b^2 e^{-b} + 2\int_0^b xe^x dx$$

なので, $b \to \infty$ のとき, $\Gamma(3) = 0 + 2\Gamma(2) = 2$. また, 自然数 n に対しては, 同様に

$$\int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx = -b^{n-1} e^{-b} + (n-1) \int_0^b x^{n-2} e^x dx$$

なので, $b \to \infty$ のとき, $\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$. よって帰納的に,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1) \cdot \Gamma(n-1) \\
&= (n-1)(n-2) \cdot \Gamma(n-2) \\
&= \cdots \\
&= (n-1)(n-2) \cdots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \cdot \Gamma(1).
\end{aligned}$$

問題 11.1 (3) より, $\Gamma(1) = 1$ なので, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

微分積分学 II 自習用問題・解答

12　面積

問 12.1.

(1) $\dfrac{7}{3}$　(2) 1　(3) 2　(4) $\dfrac{27}{4}$

(5) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(6) $\dfrac{1}{2}e^4-\dfrac{3}{2}e^2+e$　(7) $\dfrac{5}{12}$　(8) $\dfrac{3}{2}-2\log 2$

問 12.2. $x=t-\sin t$ より, $dx=(1-\cos t)dt$. また, $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 2\pi \\ \hline x & 0 & \to & 2\pi \end{array}$ なので,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} ydx &= \int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi.\end{aligned}$$

13　体積

問 13.1.

(1) $\dfrac{\pi}{5}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$　(3) $\dfrac{\pi}{2}\left(e^4-e^2\right)$　(4) $\dfrac{\pi^2}{2}$

14　曲線の長さ

問 14.1.

(1) $e-\dfrac{1}{e}$　(2) $\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}$　(3) $\dfrac{e^2+1}{4}$

(4) $\dfrac{\pi}{2}$　(5) $2\log 3-1$　(6) $\log 3$