微分積分学 II レポート (No.4) ・解答

問題. 次の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2 \geqq 0$ なので, $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\sin x \geqq 0$ なので, $\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2.$

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $e^{2x} \geqq e^x$ なので,

$$\int_1^2 (e^{2x} - e^x) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right]_1^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 + e.$$

(4) $\dfrac{2}{x} = 3 - x$ を解くと, $x = 1, 2$. よって, $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $3 - x \geqq \dfrac{2}{x}$ なので,

$$\int_1^2 \left\{(3-x) - \frac{2}{x}\right\} dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - 2\log|x|\right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\log 2.$$

問題. 次の曲線で囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $\pi \displaystyle\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$

(2) $\pi \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$

問題. 次の曲線の長さを求めよ．

(1) $1 + \left\{ \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' \right\}^2 = 1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{9}{4} \left(x + \frac{4}{9} \right)$ なので，

$$\int_0^1 \frac{3}{2} \sqrt{x + \frac{4}{9}} dx = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

(2) $1 + \left\{ \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\log x}{2} \right)' \right\}^2 = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right)^2$ なので，

$$\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\log x}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4}.$$

問題. 次の関数を偏微分せよ.

(1)
- $f_x(x,y) = 2x \cdot y^3 = 2xy^3$,
- $f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$.

(2)
- $f_x(x,y) = 2x + y$,
- $f_y(x,y) = x - 2y$.

(3)
- $f_x(x,y) = e^{xy} \cdot y = ye^{xy}$,
- $f_y(x,y) = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}$.

(4)
- $f_x(x,y) = \cos(2x - y) \cdot 2 = 2\cos(2x - y)$,
- $f_y(x,y) = \cos(2x - y) \cdot (-1) = -\cos(2x - y)$.

(5)
- $f_x(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$,
- $f_y(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\dfrac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$.

(6)
- $f_x(x,y) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$,
- $f_y(x,y) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

問題. 次の関数 $f(x,y)$ と実数 a,b に対して, 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ.

(1)
- $f(1,1)=1$,
- $f_x(x,y)=2xy^3$ より, $f_x(1,1)=2$,
- $f_y(x,y)=3x^2y^2$ より, ${}_y(1,1)=3$.

よって, $z=2(x-1)+3(y-1)+1=2x+3y-4$.

(2)
- $f(2,-1)=1$,
- $f_x(x,y)=2x+y$ より, $f_x(2,-1)=3$,
- $f_y(x,y)=x-2y$ より, $f_y(2,-1)=4$.

よって, $z=3(x-2)+4(y+1)+1=3x+4y-1$.

(3)
- $f(0,1)=1$,
- $f_x(x,y)=ye^{xy}$ より, $f_x(0,1)=1$,
- $f_y(x,y)=xe^{xy}$ より, $f_y(0,1)=0$.

よって, $z=1(x-0)+0(y-1)+1=x+1$.

(4)
- $f(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=0$,
- $f_x(x,y)=2\cos(2x-y)$ より, $f_x(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=2$,
- $f_y(x,y)=-\cos(2x-y)$ より, $f_y(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=-1$.

よって, $z=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\left(y-\frac{\pi}{2}\right)=2x-y$.

(5)
- $f(2,1)=1$,
- $f_x(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ より, $f_x(2,1)=-2$,
- $f_y(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ より, $f_y(2,1)=-1$.

よって, $z=-2(x-2)-1(y-1)+1=-2x-y+6$.

(6)
- $f(1,0)=0$,
- $f_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ より, $f_x(1,0)=0$,
- $f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ より, $f_y(1,0)=1$.

よって, $z=0(x-1)+1(y-0)=y$.