1　経済数学入門 II (2018/09/19)：累乗の微分

ここでは, 累乗の定義と性質を紹介し, 累乗で表された関数の微分を求めます.

1.1　累乗の定義

x^n のような数を <u>累乗</u> と呼び, x を <u>底</u>, n を <u>指数</u> といいます. 指数が自然数の場合には次のように定義します.

定義 1.1 (指数が自然数の場合)**.** x^n を「x を n 回かけた数」と定義する.

しかし, この形のままでは指数が 0 や負の整数, 分数の場合に累乗を定義することができません. そこで, そのような数の場合には "自然な形で" 累乗の定義を拡張します.

注意 1.2. 以下, 累乗を考える際は <u>底は 0 より大きい</u> とします.

定義 1.3 (指数が 0 の場合)**.** $x^0 = 1$ と定義する.

定義 1.4 (指数が負の数の場合)**.** $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ と定義する. 特に, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ と定義する.

定義 1.5 (指数が分数の場合)**.** $x^{\frac{m}{n}}$ を 「n 乗すると x^m になる正の数」と定義する. [*1]

例 1.6. 次が成り立つ.

(1) $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

(3) $x^{-0.7} = \dfrac{1}{x^{0.7}}$　　(4) $\dfrac{1}{x^{-2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$

練習問題 1. 次の式を「指数が正の累乗」を用いて表せ.

(1) $x^{-3} =$　　(2) $x^{-1} =$

(3) $x^{-\frac{2}{3}} =$　　(4) $x^{-0.6} =$

(5) $\dfrac{1}{x^{-3}} =$　　(6) $\dfrac{1}{x^{-\frac{2}{3}}} =$

[*1] $x^{\frac{1}{n}}$ を $\sqrt[n]{x}$ (特に $n = 2$ のときは $\sqrt{x}$) と表すことがあります.

1.2　指数法則

ここでは, 累乗の性質 (指数法則) について説明します.

命題 1.7. 次が成り立つ:

(1) $x^m \times x^n = x^{m+n}$　(2) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

(3) $(x^m)^n = x^{mn}$　(4) $(xy)^n = x^n y^n$

注意 1.8. 分かりづらいときは, $m = 2$, $n = 3$ などの場合で確認しましょう.

例 1.9. 次が成り立つ.

(1) $x^2 \times x^{-\frac{4}{3}} = x^{2-\frac{4}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$.　(2) $x^{0.3} \times x^{-1} = x^{0.3-1} = x^{-0.7} = \dfrac{1}{x^{0.7}}$.

(3) $\dfrac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.　(4) $\dfrac{x^{0.6}}{x^{-0.4}} = x^{0.6-(-0.4)} = x^1 = x$.

(5) $(x^6)^{\frac{2}{3}} = x^{6\cdot\frac{2}{3}} = x^4$.　(6) $(x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}})^3 = (x^{\frac{2}{3}})^3 \cdot (y^{\frac{1}{3}})^3 = x^2 y$.

練習問題 2. 次の式を計算せよ.

(1) $x^5 \times x^{-2} =$

(2) $x^{\frac{1}{3}} \times x^{-1} =$

(3) $\dfrac{x^2}{x^2} =$

(4) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}} =$

(5) $(x^{\frac{1}{2}})^6 =$

(6) $(x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}})^4 =$

(7) $\dfrac{x^{-0.4} y^{0.3}}{x^{0.6} y^{-0.7}} =$

1.3　累乗の微分

ここでは累乗 x^n の微分を計算します.

まず指数が自然数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合には, $(x^n)' = nx^{n-1}$ という公式から微分を求めることができました.

例 1.10 (復習)**.** 次が成り立つ.

(1) $\left(x^2\right)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x^1 = 2x.$　　(2) $\left(x^3\right)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2.$

この公式は, 一般の累乗に対して成り立ちます.

命題 1.11. 一般に, $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ.

例 1.12. 次が成り立つ.

(1) $\left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$　　(2) $\left(x^{-2}\right)' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}.$

(3) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$　　(4) $\left(x^{0.6}\right)' = 0.6 \cdot x^{0.6-1} = 0.6x^{-0.4} = \dfrac{0.6}{x^{0.4}}.$

練習問題 3. 次の微分を求めよ.

(1) $\left(x^4\right)' =$

(2) $\left(x^{-4}\right)' =$

(3) $\left(x^{-5}\right)' =$

(4) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$

(5) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' =$

(6) $\left(x^{0.4}\right)' =$

2　経済数学入門 II (2018/09/26)：多項式の微分

ここでは, 多項式の微分, 特に因数分解された式の微分を求めます.

2.1　多項式の微分

微分とは, 関数 $f(x)$ に対して, 変化量 h を限りなく 0 に近づけたときの変化の割合のことでした. ここでは前期に扱った多項式 (n 次式) の微分について復習します.

命題 2.1. 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

(2) $(c \times f(x))' = c \times f'(x)$.　(ただし, c は x に関係のない定数)

(1) から, 多項式であれば各項ごとに微分すればよいことが分かります. また (2) から, 各項の係数は微分に関係のないことが分かります. そのため, 次の公式が基本となります.

命題 2.2 (復習)**.** 次が成り立つ.

(1) $(ax+b)' = a$.　特に, $x' = 1$, $(\text{定数})' = 0$.

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$.　特に, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $\left(x^4\right)' = 4x^3$, $\cdots$.

例 2.3. 次が成り立つ:

(1) $(3x+4)' = 3 \times x' + 4' = 3 \times 1 + 0 = 3$.

(2) $\left(x^2-3x+4\right)' = \left(x^2\right)'' - 3 \times x' + 4' = 2x - 3 \times 1 + 0 = 2x - 3$.

練習問題 1. 次の微分を求めよ.

(1) $(2x-5)' =$

(2) $\left(2x^2-5\right)' =$

(3) $\left(2x^2-5x+3\right)' =$

(4) $\left(2x^3-5x^2+3\right)' =$

(5) $\left(2x^4-5x^3+3x^2\right)' =$

2.2　積の微分

ここでは 2 つの関数の積 $f(x)g(x)$ の微分を考えます.

和の微分では「項ごとに微分する」という性質がありましたが, 積の微分では同様の性質は成り立ちません. 次の公式を用いて微分を求めます.

命題 2.4. 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

例 2.5. 次が成り立つ.

(1) $((2x-3)(3x+4))' = (2x-3)' \cdot (3x+4) + (2x-3) \cdot (3x+4)'$
$$= 2 \cdot (3x+4) + (2x-3) \cdot 3 = 6x + 8 + 6x - 9 = 12x - 1.$$

(2) $(x(3x+4))' = x' \cdot (3x+4) + x \cdot (3x+4)'$
$$= 1 \cdot (3x+4) + x \cdot 3 = 3x + 4 + 3x = 6x + 4.$$

(3) $\left(x^2(3x+4)\right)' = \left(x^2\right)' \cdot (3x+4) + x^2 \cdot (3x+4)'$
$$= 2x \cdot (3x+4) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 + 8x + 3x^2 = 9x^2 + 8x.$$

練習問題 2. 次の微分を求めよ.

(1) $((x+3)(2x-5))' =$

(2) $\left(x^2(2x-5)\right)' =$

(3) $\left(x^3(2x-5)\right)' =$

(4) $\left(x^3(x^2-5)\right)' =$

2.3　関数の累乗の微分

ここでは関数, 特に多項式 $f(x)$ に対して, $f(x)^n$ の微分を考えます.

まず $f(x)^n$ が展開できれば (展開公式を知っていれば), 展開してから微分することで求めることができます. しかし一般には $f(x)^n$ は展開することができませんので, 次の公式を用いて展開せずに微分を求めます.

命題 2.6. 関数 $f(x)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \times f'(x)$.

注意 2.7. 通常の累乗の微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ と似ているようですが, 最後に $f'(x)$ がついていることに注意してください.

例 2.8. 次が成り立つ:

(1) $\left((3x+4)^2\right)' = 2 \cdot (3x+4)^1 \times (3x+4)' = 2(3x+4) \times 3 = 6(3x+4)$

(2) $\left((3x+4)^3\right)' = 3 \cdot (3x+4)^2 \times (3x+4)' = 3(3x+4)^2 \times 3 = 9(3x+4)^2$

(3) $\left((x^2-3x+4)^4\right)' = 4 \cdot (x^2-3x+4)^3 \times (x^2-3x+4)' = 4(x^2-3x+4)^3(2x-3)$

練習問題 3. 次の微分を求めよ.

(1) $\left((2x-5)^2\right)' =$

(2) $\left((2x-5)^3\right)' =$

(3) $\left((2x-5)^4\right)' =$

(4) $\left((x^2+3x-5)^5\right)' =$

指数が負の場合や分数・小数の場合も, 同様に微分を求めることができます.

例 **2.9.** 次が成り立つ:

(1) $\left((3x+4)^{-1}\right)' = -1\cdot(3x+4)^{-2}\times(3x+4)' = -\dfrac{1}{(3x+4)^2}\times 3 = -\dfrac{3}{(3x+4)^2}$

(2) $\left((3x+4)^{-2}\right)' = -2\cdot(3x+4)^{-3}\times(3x+4)' = -\dfrac{2}{(3x+4)^3}\times 3 = -\dfrac{6}{(3x+4)^3}$

(3) $\left((3x+4)^{0.6}\right)' = 0.6\cdot(3x+4)^{-0.4}\times(3x+4)' = \dfrac{0.6}{(3x+4)^{0.4}}\times 3 = \dfrac{1.8}{(3x+4)^{0.4}}$

練習問題 **4.** 次の微分を求めよ.

(1) $\left((2x-5)^{-1}\right)' =$

(2) $\left((2x-5)^{-2}\right)' =$

(3) $\left((2x-5)^{0.4}\right)' =$

(4) $\left((2x-5)^{\frac{1}{2}}\right)' =$

(5) $\left((x^2+3x-5)^{-3}\right)' =$

3　経済数学入門 II (2018/10/10)：積の微分・商の微分

ここでは, 積の微分や商の微分を求めます.

3.1　積の微分 (続き)

積の微分や関数の累乗の微分については前回既に計算しました. ここでは, さらに複雑な形の積の微分を計算します.

命題 3.1 (復習)**.** 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(2) $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \times f'(x)$.

例 3.2. 次が成り立つ.

(1)
$$\begin{aligned}
\left(x^2(3x+4)^3\right)' &= \left(x^2\right)' \cdot (3x+4)^3 + x^2 \cdot \left((3x+4)^3\right)' && \text{(積の微分)} \\
&= 2x \cdot (3x+4)^3 + x^2 \cdot \left\{3(3x+4)^2 \times (3x+4)'\right\} && \text{(累乗の微分)} \\
&= 2x(3x+4)^3 + 9x^2(3x+4)^2 && \text{(計算)} \\
&= x(3x+4)^2\{2(3x+4) + 9x\} && \text{(因数分解)} \\
&= x(3x+4)^2(15x+8). && \text{(整理)}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\left(x^3(3x-4)^5\right)' &= \left(x^3\right)' \cdot (3x-4)^5 + x^3 \cdot \left((3x-4)^5\right)' \\
&= 3x^2 \cdot (3x-4)^5 + x^3 \cdot \left\{5(3x-4)^4 \times (3x-4)'\right\} \\
&= 3x^2(3x-4)^5 + 15x^3(3x-4)^4 \\
&= 3x^2(3x-4)^4\{(3x-4) + 5x\} \\
&= 3x^2(3x-4)^4(8x-4) = 12x^2(3x-4)^4(2x-1).
\end{aligned}$$

練習問題 1. 次の微分を求めよ.

(1) $\left(x^2(2x-5)^2\right)' =$

(2) $\left(x^3(2x-5)^2\right)' =$

(3) $\left(x^2(2x-5)^3\right)' =$

例 3.3. 次が成り立つ:

(1)
$$\begin{aligned}
\left(x^{0.4}(3x+4)^{0.6}\right)' &= \left(x^{0.4}\right)' \cdot (3x+4)^{0.6} + x^{0.4} \cdot \left((3x+4)^{0.6}\right)' \\
&= 0.4x^{-0.6} \cdot (3x+4)^{0.6} + x^{0.4} \cdot \left\{0.6(3x+4)^{-0.4} \times (3x+4)'\right\} \\
&= \frac{0.4(3x+4)^{0.6}}{x^{0.6}} + \frac{1.8x^{0.4}}{(3x+4)^{0.4}} \\
&= \frac{0.4(3x+4)^{0.6} \cdot (3x+4)^{0.4}}{x^{0.6} \cdot (3x+4)^{0.4}} + \frac{1.8x^{0.4} \cdot x^{0.6}}{(3x+4)^{0.4} \cdot x^{0.6}} \\
&= \frac{0.4(3x+4)+1.8x}{x^{0.6}(3x+4)^{0.4}} = \frac{0.2(15x+8)}{x^{0.6}(3x+4)^{0.4}}
\end{aligned}$$

発展問題 2. 次の微分を求めよ.

(1) $\left(x^{0.4}(2x-5)^{0.6}\right)' =$

3.2 商の微分

ここでは特別な形をした商の微分を計算します.

まず分子が 1 の場合を考えます. この場合は累乗の微分に帰着することができます.

例 3.4. 次が成り立つ.

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2 \cdot x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}.$

(3) $\left(\dfrac{1}{(3x+4)^2}\right)' = \left((3x+4)^{-2}\right)' = -2 \cdot (3x+4)^{-3} \times (3x+4)' = -\dfrac{6}{(3x+4)^3}.$

命題 3.5. 関数 $f(x)$ に対して, $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$. 特に, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ が成り立つ.

練習問題 3. 次の微分を求めよ.

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{1}{2x-5}\right)' =$

(4) $\left(\dfrac{1}{(2x-5)^3}\right)' =$

次に分子が多項式, 分母が x の場合を考えます. この場合は項ごとにばらすことで微分を求めることができます.

例 3.6. 次が成り立つ.

(1) $\left(\dfrac{3x+4}{x}\right)' = (3+4x^{-1})' = 0+4\cdot(-1)x^{-2} = -\dfrac{4}{x^2}.$

(2) $\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x}\right)' = (x+3+4x^{-1})' = 1+0+4\cdot(-1)x^{-2} = 1-\dfrac{4}{x^2}.$

練習問題 4. 次の微分を求めよ.

(1) $\left(\dfrac{2x-5}{x}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{x^2+2x-5}{x}\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{x^3+2x^2-5x+1}{x}\right)' =$

最後に一般の場合, すなわち分子・分母がともに式 (関数) の場合を考えます. この場合は $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ と考えて, これまでの微分を応用することで次の公式が得られます.

命題 3.7. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$

例 3.8. $\left(\dfrac{3x+4}{x}\right)' = \dfrac{(3x+4)'\cdot x-(3x+4)\cdot x'}{x^2} = \dfrac{3\cdot x-(3x+4)\cdot 1}{x^2} = -\dfrac{4}{x^2}.$

発展問題 5. 上の公式を利用して, 練習問題 4 を解け.

4　経済数学入門 II (2018/10/17)：２変数関数とそのグラフ

ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ について考えます.

4.1　2 変数関数

これまでは $f(x)=2x-1$ や $f(x)=x^2$ のように「x の値を決めると値が決まる」という関数 (1 変数関数) を扱ってきました. ここでは $f(x,y)=xy$ や $f(x,y)=x^2+y^2$ のように「x と y の2つの値を決めると値が決まる」という関数 (2 変数関数) について考えます.

定義 4.1. x,y を変数とする関数を 2 変数関数 といい, $f(x,y)$ のように表す.

例 4.2. 以下は 2 変数関数である.

(1) $f(x,y)=2x+3y$　　(2) $f(x,y)=x^2y$

(3) $f(x,y)=x^2+y^2+2x-4y+5$　　(4) $f(x,y)=\min\{x,2y\}$

注意 4.3. $\min\{a,b\}$ とは「a, b の小さい方を答える」という意味の関数です.

定義 4.4. 2 変数関数 $f(x,y)$ に $x=a$, $y=b$ を代入したときの値を $f(a,b)$ と表す.

例 4.5. 次が成り立つ.

- $f(x,y)=3x+2y$ のとき,

  (1) $f(0,0)=3\cdot 0+2\cdot 0=0.$　　(2) $f(3,-2)=3\cdot 3+2\cdot(-2)=5.$

- $f(x,y)=\min\{x,2y\}$ のとき,

  (3) $f(0,0)=\min\{0,0\}=0.$　　(4) $f(3,-2)=\min\{3,-4\}=-4.$

練習問題 1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 次の値を求めよ.

- $f(x,y)=2x+3y$ のとき,

  (1) $f(1,-2)=$

  (2) $f(-3,2)=$

- $f(x,y)=x^2y$ のとき,

  (3) $f(1,-2)=$

  (4) $f(-3,2)=$

- $f(x,y)=x^2+y^2+2x-4y+5$ のとき,

    (5) $f(1,3)=$

    (6) $f(-3,2)=$

- $f(x,y)=\min\{2x,y\}$ のとき,

    (7) $f(1,3)=$

    (8) $f(3,2)=$

逆に, $f(x,y)=c$ となる組 (x,y) を求ることを考えます (すなわち, 方程式). この場合, 答えが無数に存在することがあります.

例 **4.6.** 次が成り立つ:

- $f(x,y)=3x+2y$ のとき,
    (1) $f(x,y)=6$ を満たす (x,y) は, $(x,y)=(0,3),(1,\frac{3}{2}),(2,0),(3,-\frac{3}{2}),\cdots$.
- $f(x,y)=xy$ のとき,
    (2) $f(x,y)=6$ を満たす (x,y) は, $(x,y)=(1,6),(2,3),(3,2),(4,\frac{3}{2}),\cdots$.

練習問題 **2.** 次の条件を満たす (x,y) を 4 組以上 求めよ. ただし, $x,y\geqq 0$ とする.

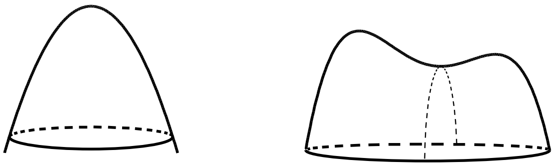
- $f(x,y)=2x+3y$ のとき,
    (1) $f(x,y)=6$

- $f(x,y)=xy$ のとき,
    (2) $f(x,y)=4$

- $f(x,y)=\min\{x,y\}$ のとき,
    (3) $f(x,y)=4$

4.2　2 変数関数のグラフ

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフは xy 座標（2 次元）に 曲線 として描くことができました. 一方, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは xyz 座標 (3 次元) に 曲面 として描くことになり, 一般には困難です.



4.3　2 変数関数のグラフと等高線

地図で山や谷の地形を表す際に「同じ高さの地点を結んだ線」を等高線といいます. これにより, 立体的な地形を平面上の地図の上で図示することができました. 同様のことを, 2 変数関数のグラフに対して考えます.

定義 4.7. c を定数とする. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, $f(x, y) = c$ を満たす点 (x, y) の集まりを, $f(x, y) = c$ のグラフ, あるいは $f(x, y)$ の高さ c における 等高線 という.

注意 4.8. 図形的には, $f(x, y) = c$ が表すグラフ (曲線) とは, $z = f(x, y)$ のグラフ (曲面) を平面 $z = c$ で横に切ったときの断面のことです.

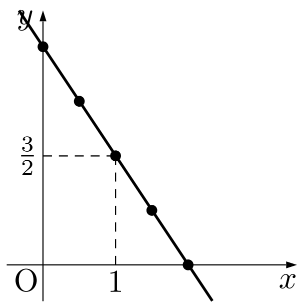
例 4.9.

- $f(x, y) = 3x + 2y$ のとき,

  (1) $f(x, y) = 6$ を満たす (x, y) は,

$$(x, y) = (0, 3), (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}), (1, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{4}), (2, 0), \cdots$$

  なので, $f(x, y) = 6$ のグラフは右図のようになる.

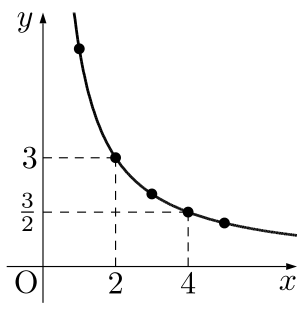


- $f(x, y) = xy$ のとき,

  (1) $f(x, y) = 6$ を満たす (x, y) は,

$$(x, y) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (4, \frac{3}{2}), (5, \frac{6}{5}), \cdots$$

  なので, $f(x, y) = 6$ のグラフは右図のようになる.



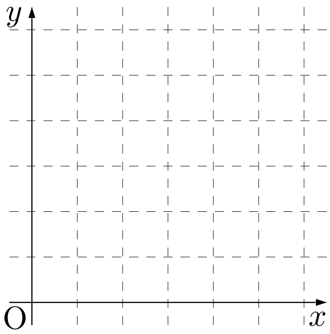
注意 4.10. この場合, (1) は直線 $y = -\dfrac{3}{2}x + 3$ のグラフに, (2) は $y = \dfrac{6}{x}$ という反比例のグラフになります.

練習問題 3. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 次のグラフを描け (主に $x,y \geqq 0$ の範囲でだけよい). ただし, 縦軸・横軸ともに 1 目盛りを 1 とする.

- $f(x,y)=2x+3y$ のとき,

  (1) $f(x,y)=6$ のグラフ

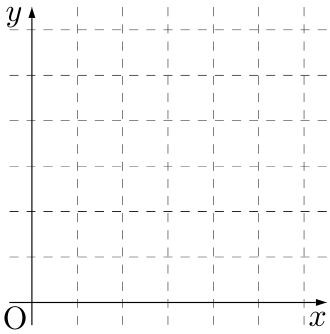
  (2) $f(x,y)=12$ のグラフ



- $f(x,y)=xy$ のとき,

  (3) $f(x,y)=4$ のグラフ

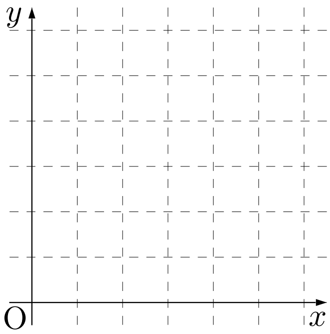
  (4) $f(x,y)=10$ のグラフ



- $f(x,y)=\min\{x,y\}$ のとき,

  (5) $f(x,y)=2$ のグラフ

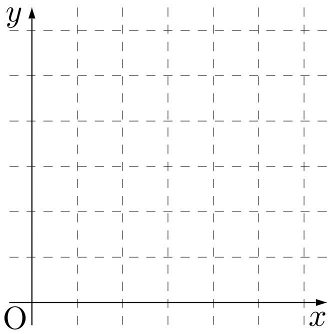
  (6) $f(x,y)=4$ のグラフ



- $f(x,y)=\min\{2x,y\}$ のとき,

  (7) $f(x,y)=2$ のグラフ

  (8) $f(x,y)=4$ のグラフ



5　経済数学入門 II (2018/10/24)： 2変数関数の偏微分

ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, その「微分」を考えます. ただし, $f(x,y)$ は x と y の式ですから, 「x に関する微分」と「y に関する微分」をそれぞれ考えます.

5.1　偏微分の定義

ここでは, 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏微分を定義します. 偏微分とは 2 変数関数に対して「他方の変数を定数だと思って, ある変数に関して微分すること」です.

定義 5.1. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して,

(1) $f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$,

(2) $f_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

をそれぞれ $f(x,y)$ の x-偏微分, y-偏微分 といい, まとめて 偏微分 という.

注意 5.2. 1 変数関数の微分と同様に, 2 変数関数 $z=f(x,y)$ に対して, その偏微分を表す記法は複数存在します: x-偏微分であれば, $f_x(x,y)$, z_x, $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ など. ただし d ではなく ∂ を使うことに注意してください.

5.2　偏微分の計算

まず, x の多項式と y の多項式の和で表される式を考えます. この場合, x-偏微分であれば「x の式は通常通り微分し, y の式は 0 とする」ことで偏微分を求めることができます.

注意 5.3. 式の微分を $(\quad)'$ と表したように, 式の偏微分を $(\quad)_x$ や $(\quad)_y$ と表すことにします (ただし, あくまでこの授業だけの記法だと思ってください).

例 5.4. 次が成り立つ.

- $f(x,y)=2x+3y$ のとき,

  (1) $f_x(x,y) = (2x+\cancel{3y})_x = 2+0 = 2$,

  (2) $f_y(x,y) = (\cancel{2x}+3y)_y = 0+3 = 3$.

- $f(x,y) = x^2-2y^2-3x+4y-5$ のとき,

  (3) $f_x(x,y) = \left(x^2-\cancel{2y^2}-3x+\cancel{4y}-\cancel{5}\right)_x = 2x-0-3+0-0 = 2x-3$,

  (4) $f_y(x,y) = \left(\cancel{x^2}-2y^2-\cancel{3x}+4y-\cancel{5}\right)_y = 0-4y-0+4-0 = -4y+4$.

注意 5.5. 先に $f(x,y)$ を x や y で整理しておくと, 偏微分を求めやすくなります.

(3) $f_x(x,y) = \left(x^2 - 3x + \cancel{(-2y^2 + 4y - 5)}\right)_x = 2x - 3,$

(4) $f_y(x,y) = \left(-2y^2 + 4y + \cancel{(x^2 - 3x - 5)}\right)_y = -4y + 4.$

練習問題 1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分を求めよ.

- $f(x,y) = 2x - 3y + 5$ のとき,

  (1) $f_x(x,y) =$

  (2) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = x^2 - 3y^4 + 5$ のとき,

  (3) $f_x(x,y) =$

  (4) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5$ のとき,

  (5) $f_x(x,y) =$

  (6) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = -3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 2$ のとき,

  (7) $f_x(x,y) =$

  (8) $f_y(x,y) =$

5.2 偏微分の計算 (続き)

次に x と y の積で表される式を考えます．この場合, x-偏微分であれば y の方を定数倍だと考え, 「x の方だけ微分し, y の式とかける」ことで偏微分を求めることができます.

例 5.6. 次が成り立つ.

- $f(x,y) = x^2y^3$ のとき,
  (1) $f_x(x,y) = 2x \cdot y^3 = 2xy^3$,
  (2) $f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$.
- $f(x,y) = x^{0.4}y^{0.6}$ のとき,
  (3) $f_x(x,y) = 0.4x^{-0.6} \cdot y^{0.6} = \dfrac{0.4y^{0.6}}{x^{0.6}}$,
  (4) $f_y(x,y) = x^{0.4} \cdot 0.6y^{-0.4} = \dfrac{0.6x^{0.4}}{y^{0.4}}$.

練習問題 2. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分を求めよ.

- $f(x,y) = x^4y^2$ のとき,
  (1) $f_x(x,y) =$
  (2) $f_y(x,y) =$
- $f(x,y) = xy$ のとき,
  (3) $f_x(x,y) =$
  (4) $f_y(x,y) =$
- $f(x,y) = x^{0.8}y^{0.2}$ のとき,
  (5) $f_x(x,y) =$
  (6) $f_y(x,y) =$

例 5.7. 次が成り立つ.

- $f(x,y)=x^2y^3-4xy^2+5x$ のとき,
  (1) $f_x(x,y)=\left(x^2\cdot y^3-4x\cdot y^2+5x\right)_x=2x\cdot y^3-4\cdot y^2+5=2xy^3-4y^2+5,$
  (2) $f_y(x,y)=\left(x^2\cdot y^3-4x\cdot y^2+\cancel{5x}\right)_y=x^2\cdot 3y^2-4x\cdot 2y=3x^2y^2-8xy.$

練習問題 3. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分を求めよ.

- $f(x,y)=x^4y^2-2x^3y$ のとき,

  (1) $f_x(x,y)=$

  (2) $f_y(x,y)=$

- $f(x,y)=2x^4y^3-4x^2y+5y-6$ のとき,

  (3) $f_x(x,y)=$

  (4) $f_y(x,y)=$

- $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2-4x+5y-6$ のとき,

  (5) $f_x(x,y)=$

  (6) $f_y(x,y)=$

- $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ のとき,

  (7) $f_x(x,y)=$

  (8) $f_y(x,y)=$

5.3　2 階偏微分

ここでは, 2 変数関数 $f(x,y)$ の 2 階偏微分を定義し, それらを求めます.

定義 5.8. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して,

(1) $f_x(x,y)$ の x-偏微分, y-偏微分をそれぞれ $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$,

(2) $f_y(x,y)$ の x-偏微分, y-偏微分をそれぞれ $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$

と表し, これらをあわせて 2 階偏微分 という. (同様に, 高階 (3 階, 4 階, $\cdots$) の偏微分も定義されます.)

注意 5.9. 2 階偏微分を表す記法も同様にあります: $f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y), \cdots$ など. その際, x, y がつく順番が逆になっていることに注意してください (いずれも f に近い順に偏微分する).

例 5.10. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 3x + 4y - 5$ のとき,

- $f_x(x,y) = 2x - 3$ なので,

  (1) $f_{xx}(x,y) = (2x - \cancel{3})_x = 2,$

  (2) $f_{xy}(x,y) = (\cancel{2x} - \cancel{3})_y = 0.$

- $f_y(x,y) = -4y + 4$ なので,

  (3) $f_{yx}(x,y) = (\cancel{-4y} + \cancel{4})_x = 0,$

  (4) $f_{yy}(x,y) = (-4y + \cancel{4})_y = -4.$

練習問題 4. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 2 階偏微分を求めよ.

- $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5$ のとき,

  $f_x(x,y) =$

  (1) $f_{xx}(x,y) =$

  (2) $f_{xy}(x,y) =$

  $f_y(x,y) =$

  (3) $f_{yx}(x,y) =$

  (4) $f_{yy}(x,y) =$

- $f(x,y) = x^4y^2 - 2x^3y$ のとき,

(5) $f_{xx}(x,y) =$

(6) $f_{xy}(x,y) =$

(7) $f_{yx}(x,y) =$

(8) $f_{yy}(x,y) =$

- $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y - 6$ のとき,

(9) $f_{xx}(x,y) =$

(10) $f_{xy}(x,y) =$

(11) $f_{yx}(x,y) =$

(12) $f_{yy}(x,y) =$

- $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ のとき,

(13) $f_{xx}(x,y) =$

(14) $f_{xy}(x,y) =$

(15) $f_{yx}(x,y) =$

(16) $f_{yy}(x,y) =$

6　経済数学入門 II (2018/10/31)：２変数関数の極大・極小

ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, その極大値・極小値を与える (x,y) を求めます.

6.1　偏微分の復習

ここでは, 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏微分について復習します.

定義 6.1. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して,
(1) x に関する微分を x**-偏微分**,
(2) y に関する微分を y**-偏微分**
といい, それぞれ $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ と表す. 同様に 2 階偏微分も定義する.

例 6.2. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 4y + 5$ のとき,

- $f_x(x,y) = (x^2 + 3xy + \cancel{2y^2} - 3x - \cancel{4y} + \cancel{5})_x = 2x + 3y - 3$,
- $f_y(x,y) = (\cancel{x^2} + 3xy + 2y^2 - \cancel{3x} - 4y + \cancel{5})_y = 3x + 4y - 4$.

さらに,

- $f_{xx}(x,y) = (2x + \cancel{3y} - \cancel{3})_x = 2$,
- $f_{xy}(x,y) = (\cancel{2x} + 3y - \cancel{3})_y = 3$,
- $f_{yx}(x,y) = (3x + \cancel{4y} - \cancel{4})_x = 3$,
- $f_{yy}(x,y) = (\cancel{3x} + 4y - \cancel{4})_y = 4$.

練習問題 1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分を求めよ.

- $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x - 6y + 3$ のとき,

  (1) $f_x(x,y) =$

  (2) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 4y - 1$ のとき,

  (3) $f_x(x,y) =$

  (4) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 - 4x + 2y + 5$ のとき,

  (5) $f_x(x,y) =$

  (6) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2 - 4$ のとき,

  (7) $f_x(x,y) =$

  (8) $f_y(x,y) =$

- $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ のとき,

  (9) $f_x(x,y) =$

  (10) $f_y(x,y) =$

定義 6.3. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ に $(x,y) = (a,b)$ を代入した値をそれぞれ **x-偏微分係数**, **y-偏微分係数** といい, $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ と表す. 同様に 2 階偏微分係数も定義する.

例 6.4. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 4y + 5$ のとき,

- $f_x(x,y) = 2x + 3y - 3$,
- $f_y(x,y) = 3x + 4y - 4$

なので,

- $(x,y) = (0,0)$ のときの偏微分係数は, $f_x(0,0) = -3$, $f_y(0,0) = -4$,
- $(x,y) = (1,2)$ のときの偏微分係数は, $f_x(1,2) = 5$, $f_y(1,2) = 7$.

6.2　2 変数関数の極大・極小

ここでは, 2 変数関数 $f(x, y)$ の極大・極小について, 定義します.

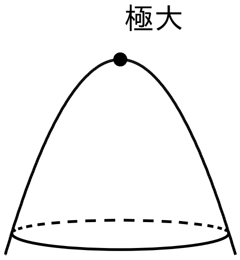
定義 6.5. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して,

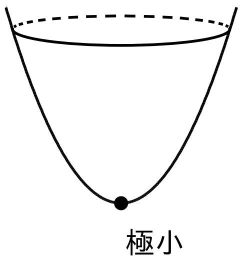
(1) $(x, y) = (a, b)$ のとき <u>極大</u> であるとは, 点 (a, b) の周りで $f(a, b)$ が最大となること,

(2) $(x, y) = (a, b)$ のとき <u>極小</u> であるとは, 点 (a, b) の周りで $f(a, b)$ が最小となること.

そのときの値 $f(a, b)$ をそれぞれ <u>極大値</u>, <u>極小値</u> という.

例 6.6. 2 変数関数のグラフは曲面ですので, 曲面を山の地形を見たときの頂上と谷底がそれぞれ極大と極小にあたります.



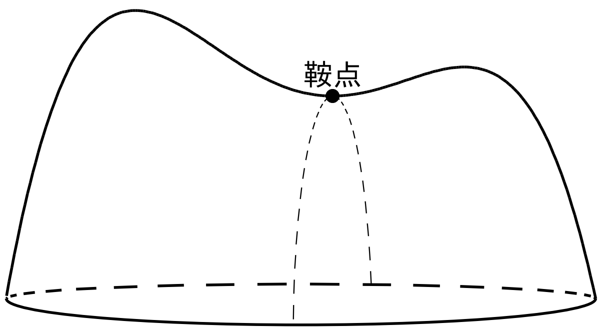


注意 6.7. 1 変数関数の場合と同様, 極大 (極小) はあくまで「部分的」な最大 (最小) ですので, 「全体的」な最大 (最小) と一致するとは限りません. また, 極大 (極小) となる点は複数存在する場合があります.

2 変数関数のグラフで極大 (極小) となる点は, その点を通るどんな線上で極大 (極小) となります (イメージは, 山の頂上にどの方向から向かっても必ず上って下りるという感じ).

一方で「ある線上では極大でも, 別の線上では極小となる点」も存在します.

例 6.8. 次のような点を <u>鞍点</u> という:



6.3　2 変数関数の停留点

ここでは, 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して停留点を求めます.

定義 6.9. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, 方程式 $\begin{cases} f_x(x, y) & = & 0 \\ f_y(x, y) & = & 0 \end{cases}$ の解を 停留点 という.

停留点とは, 2 変数関数のグラフにおいて, x 軸方向, y 軸方向に関して微分が 0 になる点のことです. 1 変数の場合と同様に, 次が成り立ちます.

命題 6.10. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, $(x, y) = (a, b)$ のとき極大 (極小) ならば, 点 (a, b) は停留点である.

注意 6.11. これも 1 変数の場合と同様ですが, 停留点だからといってその点で極大 (極小) になるとは限りません (鞍点のような停留点も存在します). したがって, 停留点は極大 (極小) となる点の「候補」となります.

例 6.12. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 4y + 5$ の停留点を求める.

- $f_x(x, y) = 2x + 3y - 3 = 0$
- $f_y(x, y) = 3x + 4y - 4 = 0$

すなわち, $\begin{cases} 2x + 3y & = & 3 \\ 3x + 4y & = & 4 \end{cases}$ を解いて, $(x, y) = (0, 1)$.

例 6.13. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 6$ の停留点を求める.

- $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0$
- $f_y(x, y) = -6x + 6y = 0$

すなわち, $\begin{cases} x^2 - 2y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{cases}$ を解いて, $(x, y) = (0, 0), (2, 2)$.

練習問題 2. 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の停留点を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4x - 6y + 3$

(2) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 4y - 1$

(3) $f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 - 4x + 2y + 5$

(4) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2 - 4$

6.4　2 変数関数の極大・極小の判定 (発展)

ここでは, 2 変数関数 $f(x,y)$ の停留点が極大・極小となるかどうかを調べます.

命題 6.14. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 点 (a,b) が停留点であるとする. このとき,

(1) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ ならば, $(x,y)=(a,b)$ で極小,

(2) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0$ ならば, $(x,y)=(a,b)$ で極大.

$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$ を, $f(x,y)$ の (a,b) における <u>ヘッシアン</u> といいます.

例 6.15. $f(x,y)=x^2+2xy+4y^2-2x+4y+5$ の極大・極小を求める. まず停留点は

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+2y-2=0 \\ f_y(x,y)=2x+8y+4=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x+y &= 1 \\ x+4y &= -2 \end{cases}$$

を解いて, $(x,y)=(2,-1)$. さらに,

- $f_{xx}(x,y)=(2x+2y-2)_x=2,\quad f_{xy}(x,y)=(2x+2y-2)_y=2$
- $f_{yy}(x,y)=(2x+8y+4)_y=8$

なので,

- $f_{xx}(2,-1)f_{yy}(2,-1)-f_{xy}(2,-1)^2=2\times 8-2^2=12>0,$
- $f_{xx}(2,-1)=2>0.$

以上より, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,-1)$ のとき極小である (極大となる点は存在しない).

さらにヘッシアンが負や 0 の場合についても触れておきます.

命題 6.16. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 点 (a,b) が停留点であるとする. このとき,

(1) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2<0$ ならば, 点 (a,b) では極大でも極小でもない (鞍点).

(2) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2=0$ のとき, これだけでは極大・極小の判定ができない.

例 6.17. $f(x,y)=x^2+2xy-4y^2-6x+4y+5$ の極大・極小を求める. まず停留点は

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+2y-6=0 \\ f_y(x,y)=2x-8y+4=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x+y &= 3 \\ x-4y &= -2 \end{cases}$$

を解いて, $(x,y)=(2,1)$. さらに,

- $f_{xx}(x,y)=(2x+2y-6)_x=2,\quad f_{xy}(x,y)=(2x+2y-6)_y=2$
- $f_{yy}(x,y)=(2x-8y+4)_y=8$

なので,

- $f_{xx}(2,1)f_{yy}(2,1)-f_{xy}(2,1)^2=2\times(-8)-2^2=-20<0.$

以上より, $f(x,y)$ は $(x,y)=(2,1)$ のとき極大でも極小でもない (極大・極小となる点は存在しない).

7　経済数学入門 II (2018/11/07)：利潤の最大化

ここでは「1 つの企業が 2 つの財を供給している場合」や「2 つの企業が 1 つの財を供給している場合」の利潤最大化を考えます.

7.1　1 つの企業が 2 つの財を供給している場合

ここでは「1 つの企業が 2 つの財 (X, Y) を供給している場合」の利潤最大化を考えます. 特に, この企業が完全競争市場における プライス・テイカー である場合を考えます.

以下, 記号を次のように設定します:

- 財 X, Y の価格をそれぞれ p, q (一定)
- 財 X, Y の生産量をそれぞれ x, y
- この企業の費用関数を $C(x, y)$
- この企業の収入を $R(x, y)$
- この企業の利潤を $\pi(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$

命題 7.1. 上記の設定の下で, 次が成り立つ.

(1) 収入は $R(x, y) = px + qy$.

(2) 利潤は $\pi(x, y) = (px + qy) - C(x, y)$.

ここでの目標は, 利潤 $\pi(x, y)$ を最大にする生産量 (x^*, y^*) を求めることです. ただし, この授業で扱う問題の場合には $\pi(x, y)$ の停留点を求めれば十分です.

命題 7.2. 利潤を最大にする生産量 (x^*, y^*) は, 連立方程式 $\begin{cases} \pi_x(x, y) = 0 \\ \pi_y(x, y) = 0 \end{cases}$ の解である.

例 7.3. 財 X, Y の価格がそれぞれ 6, 12, 費用関数が $C(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ のとき,

(1) 収入は $R(x, y) = 6x + 12y$,
利潤は $\pi(x, y) = (6x + 12y) - (x^2 + 2xy + 4y^2) = -x^2 - 2xy - 4y^2 + 6x + 12y$.

(2) よって, 連立方程式

$$\begin{cases} \pi_x(x, y) = -2x - 2y + 6 = 0 \\ \pi_y(x, y) = -2x - 8y + 12 = 0 \end{cases}$$

を解いて, $(x, y) = (2, 1)$. よって, 利潤が最大となる生産量は $(x^*, y^*) = (2, 1)$.

(3) そのときの利潤は, (1) より $\pi(2, 1) = 12$.

7.2　2 つの企業が 1 つの財を供給している場合

ここでは「2 つの企業 (企業 1, 2) が 1 つの財を供給している場合」の利潤最大化を考えます. 特に, 複占市場におけるクールノー・モデルを考えます.

定義 7.4. 2 つの企業からなる寡占市場を 複占 という.

以下, 記号を次のように設定します:

- 財 X の価格を p, 需要量 を q
- 企業 1, 2 の財 X の生産量をそれぞれ x, y
- 企業 1, 2 の費用関数をそれぞれ $C_1(x)$, $C_2(y)$
- 企業 1, 2 の収入をそれぞれ $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$
- 企業 1, 2 の利潤をそれぞれ $\pi_1(x,y)$, $\pi_2(x,y)$

命題 7.5. 上記の設定の下で, 次が成り立つ.

(1) 財 X の需要量 (取引量) は $q = x + y$.

(2) 企業 1, 2 の収入はそれぞれ $R_1(x,y) = px$, $R_2(x,y) = py$.

(3) 企業 1, 2 の利潤はそれぞれ $\pi_1(x,y) = px - C_1(x)$, $\pi_2(x,y) = py - C_2(y)$.

注意 7.6. (1) より需要量 q は x, y の 2 変数関数です. 一方, 需要関数が分かっているとき, 価格 p は需要量 q の関数で表すことができます (逆需要関数). このことから, 価格 p も x, y の 2 変数関数となります.

ここでの目標は, 2 つの企業 1, 2 が互いの利潤 $\pi_1(x,y)$, $\pi_2(x,y)$ を "バランスよく" 最大にする生産量 (x^*, y^*) を求めることです. そこで, 次の方法を考えます.

定義 7.7. 複占市場において, 互いに相手企業の供給量が一定であると考えて自企業の供給量を決定するとき, その均衡を クールノー均衡 という.

命題 7.8. クールノー均衡は連立方程式 $\begin{cases} \pi_{1x}(x,y) = 0 \\ \pi_{2y}(x,y) = 0 \end{cases}$ の解.

注意 7.9. $\pi_{1x}(x,y) = 0$, $\pi_{2y}(x,y) = 0$ のグラフを, それぞれの企業の 反応曲線 といいます. したがって, クールノー均衡とは 2 つの反応曲線の交点のことです.

例 7.10. 財 X の需要関数が $q = 5 - p$, 企業 1, 2 の費用関数がそれぞれ $C_1(x) = x^2$, $C_2(y) = y^2$ のとき,

(1) $q = x + y$ を需要関数に代入して, $x + y = 5 - p$. よって, 取引価格は $p = 5 - x - y$.

(2) 企業 1 の利潤は $\pi_1(x,y) = (5 - x - y)x - x^2 = -2x^2 - xy + 5x$,
企業 2 の利潤は $\pi_2(x,y) = (5 - x - y)y - y^2 = -xy - 2y^2 + 5y$.

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} \pi_{1x}(x,y) = -4x - y + 5 = 0 \\ \pi_{2y}(x,y) = -x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

を解いて, $(x,y) = (1,1)$. よってクールノー均衡は $(x^*, y^*) = (1,1)$

(4) そのときの取引価格は (1) より $p^* = 3$.
また企業 1, 2 の利潤は (2) よりそれぞれ $\pi_1(1,1) = 2$, $\pi_2(1,1) = 2$.

7.3 複占市場における均衡 (発展)

「クールノー均衡」以外にも複占市場における均衡が知られています．ここでは「共謀」と「シュタッケルベルグ均衡」について紹介します．

定義 7.11. 複占市場において，両企業が協調し，利潤の合計 $\pi(x,y)=\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)$ が最大となるように行動する複占モデルを 共謀 という．

例 7.12. 例 7.10 と同じ設定で，両企業の利潤の合計を $\pi(x,y)$ とすると，

(1) $\pi(x,y)=\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)=-2x^2-2xy-2y^2+5x+5y$

(2) $\pi(x,y)$ の停留点は，

$$\begin{cases} \pi_x(x,y)=-4x-2y+5=0 \\ \pi_y(x,y)=-2x-4y+5=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y)=(\frac{5}{6},\frac{5}{6})$．よって共謀における均衡は $(x^*,y^*)=(\frac{5}{6},\frac{5}{6})$．

(3) そのときの企業 1, 2 の利潤はそれぞれ $\pi_1(\frac{5}{6},\frac{5}{6})=\frac{25}{12}$, $\pi_2(\frac{5}{6},\frac{5}{6})=\frac{25}{12}$．

定義 7.13. 複占市場において，一方の企業が 先導者 として先に生産量を決定し，他方の企業が 追随者 として後から生産量を決定するとき，その均衡を シュタッケルベルグ均衡 という．

注意 7.14. 言い換えると，先導者は追随者の反応曲線を知ったうえで，自社の利潤を最大にすることができるわけです．そのため，シュタッケルベルグ均衡を求める場合は “先に追随者の反応曲線を求めてから”，それを用いて先導者の生産量を求めることになります．

例 7.15. 例 7.10 と同じ設定で，企業 1 を先導者，企業 2 を追随者すると，

(1) 企業 2 (追随者) の反応曲線は $\pi_{2y}(x,y)=0$ なので，$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$．　$\cdots$①

(2) よって，企業 1 (先導者) の利潤を $\pi(x)$ とすると，$\pi_1(x,y)$ に ① を代入して，

$$\pi(x)=\pi_1(x,-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4})=-\frac{7}{4}x^2+\frac{15}{4}x.$$

(3) 方程式

- $\pi'(x)=-\frac{7}{2}x+\frac{15}{4}=0$

を解いて，$x=\frac{15}{14}$．

(4) このとき，① より $y=\frac{55}{56}$．よって，シュタッケルベルグ均衡は $(x^*,y^*)=(\frac{15}{14},\frac{55}{56})$．

(5) そのときの企業 1, 2 の利潤はそれぞれ $\pi(\frac{15}{14})=\frac{225}{112}$, $\pi_2(\frac{15}{14},\frac{55}{56})=\frac{3025}{1568}$．

7.4 練習問題

練習問題 1. 完全競争市場において, 財 X, Y の取引価格をそれぞれ 6, 10, 企業の費用関数を $C(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 企業の収入 $R(x,y)$ と利潤 $\pi(x,y)$ を x, y を用いて表せ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} \pi_x(x,y) = 0 \\ \pi_y(x,y) = 0 \end{cases}$ を解くことで, $\pi(x,y)$ を最大化する生産量 (x^*, y^*) を求めよ.

(3) (2) のときの利潤を求めよ.

練習問題 2. 複占市場において, 財 X の需要関数を $q = 9 - p$, 企業 1, 2 の費用関数をそれぞれ $C_1(x) = \dfrac{1}{6}x^2$, $C_2(y) = \dfrac{1}{2}y^2$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 取引価格 p を x, y を用いて表せ.

(2) 企業 1, 2 の利潤 $\pi_1(x, y)$, $\pi_2(x, y)$ を x, y を用いて表せ.

(3) 連立方程式 $\begin{cases} \pi_{1x}(x, y) = 0 \\ \pi_{2y}(x, y) = 0 \end{cases}$ を解くことで, クールノー均衡 (x^*, y^*) を求めよ.

(4) (3) のときの価格を求めよ.

9　経済数学入門 II (2018/11/28)：等高線の傾き

2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, $f(x,y)=c$ のグラフを 等高線 といいました. ここでは, 等高線の傾き (正確には, 等高線の接線の傾き) について調べます.

9.1　等高線の傾き

命題 9.1. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 等高線 $f(x,y)=c$ の点 (x,y) における接線の傾きは $-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$.

注意 9.2. 以下, $-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ を「等高線 $f(x,y)=c$ の傾き」と呼ぶことにします. また, 実際に求めるのは (-1) 倍した $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ とします.

例 9.3. 次が成り立つ.

(1) $f(x,y)=2x+3y$ のとき,

$f_x(x,y)=2$, $f_y(x,y)=3$ なので, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $f(x,y)=x^2y^3$ のとき,

$f_x(x,y)=2xy^3$, $f_y(x,y)=3x^2y^2$ なので, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{2xy^3}{3x^2y^2}=\dfrac{2y}{3x}$.

(3) $f(x,y)=2x^2+3y^2$ のとき,

$f_x(x,y)=4x$, $f_y(x,y)=6y$ なので, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{4x}{6y}=\dfrac{2x}{3y}$.

練習問題 1. 次の $f(x,y)$ に対して, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=3x+2y$

(2) $f(x,y)=4x+y$

(3) $f(x,y) = x^4 y^2$

(4) $f(x,y) = x^2 y$

(5) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

(6) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

特別な 2 変数関数の場合には, 等高線の傾きは次の公式で求めることができます.

命題 9.4. 次が成り立つ.

(1) $f(x,y) = ax + by$ (線形) のとき, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{a}{b}$.

(2) $f(x,y) = x^a y^b$ (コブ・ダグラス型) のとき, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{ay}{bx}$.

(3) $f(x,y) = ax^2 + by^2$ のとき, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{ax}{by}$.

9.1　等高線の傾き (続き)

例 9.5. 次が成り立つ.

(1) $f(x,y)=4x+6y$ のとき, 公式より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $f(x,y)=x^4y^6$ のとき, 公式より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{4y}{6x}=\dfrac{2y}{3x}$.

$f(x,y)=x^{0.4}y^{0.6}$ のとき, 公式より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{0.4y}{0.6x}=\dfrac{2y}{3x}$.

練習問題 2. 次の $f(x,y)$ に対して, 公式を利用して $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=3x+2y$

(2) $f(x,y)=4x+6y$

(3) $f(x,y)=x^3y^2$

(4) $f(x,y)=x^{0.8}y^{0.2}$

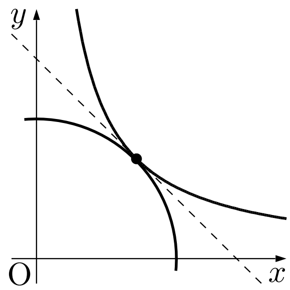
(5) $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

9.2　2 つの等高線の傾き

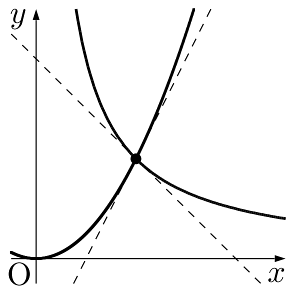
ここでは, 2 つの等高線が接するための条件を求めます.

定義 9.6. 2 つのグラフ C_1, C_2 が点 P で <u>接する</u> とは, 次が成り立つこと:

- グラフ C_1, C_2 が点 P を通る,
- グラフ C_1, C_2 の点 P における傾きが一致する



接している



接していない

ここでは 2 つの等高の傾きが一致するときための条件式 (x と y の関係式) を求めます.

命題 9.7. 等高線 $f(x,y)=c$, $g(x,y)=d$ が接するならば, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$.

注意 9.8. $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ のとき, $AD=BC$.

例 9.9. 次が成り立つ.

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=2x+3y$ のとき, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}=\dfrac{2}{3}$ なので,
等高線の傾きが一致するための条件は,

$$\begin{aligned}\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{2}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad 3x=2y\\ &\qquad (\ 3x-2y=0\ )\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=x^2y^3$, $g(x,y)=2x+3y$ のとき, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{2y}{3x}$, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}=\dfrac{2}{3}$ なので,
等高線の傾きが一致するための条件は,

$$\begin{aligned}\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2y}{3x}=\frac{2}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad y=x\\ &\qquad (\ x-y=0\ )\end{aligned}$$

9.2　2 つの等高線の傾き (続き)

練習問題 3. 次の $f(x,y)$, $g(x,y)$ に対して, 条件式 $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x,y) = 3x + 2y$

(2) $f(x,y) = x^3y^2$, $g(x,y) = 3x + 2y$

(3) $f(x,y) = x^{0.8}y^{0.2}$, $g(x,y) = 4x + y$

(4) $f(x, y) = x^2 + 2y$, $g(x, y) = 4x + y$

(5) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 y$

(6) $f(x, y) = x^a y^b$, $g(x, y) = px + qy$　(答えは a, b, p, q を用いて表すこと.)

10　経済数学入門 II (2018/12/05)：制約つき最適化問題

ここでは, x, y が $g(x,y) = I$ を満たすという条件の下で, $f(x,y)$ を最大・最小にする (x,y) やそのときの最大値・最小値を求めます. これを 制約つき最適化問題 といい, 最適化する関数を 目的関数, そのときの条件式 $g(x,y) = I$ を 制約条件 といいます.

記号では,

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y) = I \tag{10.1}$$

$$(\text{または} \quad \min_{x,y} f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y) = I)$$

のように表します. [*2]

10.1　制約つき最適化問題の解き方

一般に $f(x,y)$ の最適化問題を解く際は, $f(x,y)$ の停留点を求めるのが定石でした. しかし制約つき最適化問題の場合は, $f(x,y)$ を最大・最小にする (x,y) が制約条件 $g(x,y) = I$ を満たすとは限らないため, 同様の手法は使えません. そこで次の性質を利用します.

命題 10.1. $(x,y) = (a,b)$ が 条件 $g(x,y) = I$ の下で $f(x,y)$ を最大 (最小) にするならば, 等高線 $f(x,y) = c$ と $g(x,y) = I$ のグラフは点 (a,b) で接する.

注意 10.2. これまでと同様に, 上で述べた接点はあくまで最大 (最小) となる点の "候補" であり, 実際に最大 (最小) になるかどうかは, 別に議論する必要があります. ですが, ここではそのような議論は省略することにします.

よって, 制約つき最適化問題の解 (x,y) (の候補) は,

- 等高線 $f(x,y) = c$ と直線 $g(x,y) = I$ の傾きが一致する,
- 直線 $g(x,y) = I$ を通る

の 2 条件を満たすことになります. したがって, 制約つき最適化問題の解を求めるには

$$\begin{cases} \dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} & \quad (\text{傾きが一致}) \\ g(x,y) = I & \quad (\text{制約条件}) \end{cases} \tag{10.2}$$

という連立方程式を解けばよいことになります.

[*2] s.t. は "subject to (に従って)" の略です. s.t の前に目的関数, 後ろに制約条件を並べます.

10.2　特別な制約条件の場合

まずは制約条件が $px + qy = I$, すなわち, 直線のグラフになっている場合を考えます.

例 10.3. 目的関数が $f(x,y) = x^2 + y^2$, 制約条件が $g(x,y) = x + 2y = 5$ のとき,

- $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$ より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{2x}{2y} = \dfrac{x}{y}$.
- $g_x(x,y) = 1$, $g_y(x,y) = 2$ より, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = \dfrac{1}{2}$.
- よって, 連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ すなわち, $\begin{cases} 2x = y \\ x + 2y = 5 \end{cases}$
  を解いて, $(x,y) = (1,2)$.
- そのときの $f(x,y)$ の値は $f(1,2) = 5$.

例 10.4. 目的関数が $f(x,y) = x^2y^3$, 制約条件が $g(x,y) = 4x + 3y = 10$ のとき,

- 公式より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{2y}{3x}$.
- $g_x(x,y) = 4$, $g_y(x,y) = 3$ より, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = \dfrac{4}{3}$.
- よって, 連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{4}{3} \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$ すなわち, $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$
  を解いて, $(x,y) = (1,2)$.
- そのときの $f(x,y)$ の値は $f(1,2) = 8$.

制約条件を $y = (x$ の式$)$ (あるいは $x = (y$ の式$))$ と変形することが可能ならば, それを目的関数に代入することで, 1 変数関数の最適化問題に帰着することができます.

例 10.5. 目的関数が $f(x,y) = x^2 + y^2$, 制約条件が $g(x,y) = x + 2y = 5$ のとき,

- 制約条件より, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$. $\cdots$ ①
- ① を目的関数に代入して, $f(x,y) = x^2 + \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{25}{4}$.
- そこで, $F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{25}{4}$ とおくと,
  $F'(x) = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{5}{2} = 0$ を解いて, $x = 1$.
- $x = 1$ のとき ① より $y = 2$. よって求める解は $(x,y) = (1,2)$.

10.2　特別な制約条件の場合 (練習問題)

練習問題 1. 次の目的関数と制約条件に対して, 制約つき最適化問題の解 (x, y) を求めよ.

(1) 目的関数：$f(x, y) = 2x^2 + y^2$, 制約条件：$g(x, y) = x + y = 6$

(2) 目的関数：$f(x, y) = x^3y^2$, 制約条件：$g(x, y) = x + 2y = 5$

(3) 目的関数：$f(x, y) = x^2y$, 制約条件：$g(x, y) = x + 3y = 9$

(4) 目的関数：$f(x,y)=xy^2$, 制約条件：$g(x,y)=x+3y=9$

(5) 目的関数：$f(x,y)=x^{0.4}y^{0.6}$, 制約条件：$g(x,y)=2x+3y=10$

(6) 目的関数：$f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, 制約条件：$g(x,y)=x+4y=12$

10.3　一般の制約条件の場合

次に一般の制約条件 $g(x,y)=I$ の場合を考えます.

注意 10.6. 以下, 求める最適解は $x,y>0$ の場合のみ考えます.

例 10.7. 目的関数が $f(x,y)=x+2y$, 制約条件が $g(x,y)=x^2+y^2=5$ のとき,

- $f_x(x,y)=1,\ f_y(x,y)=2$ より, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{1}{2}$.
- $g_x(x,y)=2x,\ g_y(x,y)=2y$ より, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}=\dfrac{2x}{2y}=\dfrac{x}{y}$.
- よって, 連立方程式 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{y}\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ すなわち, $\begin{cases}y=2x\\ x^2+y^2=5\end{cases}$

  を解いて, $(x,y)=(1,2)$.

練習問題 2. 次の目的関数と制約条件に対して, 制約つき最適化問題の解 (x,y) を求めよ (ただし $x,y>0$ とする).

(1) 目的関数：$f(x,y)=x+3y$, 制約条件：$g(x,y)=x^2+y^2=10$

(2) 目的関数：$f(x,y)=x+y$, 制約条件：$g(x,y)=2x^2+y^2=6$

(3) 目的関数：$f(x,y)=xy$, 制約条件：$g(x,y)=x^2+y^2=8$

(4) 目的関数：$f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, 制約条件：$g(x,y)=x^2+2y^2=24$

(5) 目的関数：$f(x,y)=\dfrac{x}{y}$, 制約条件：$g(x,y)=x^2-2y+9=0$

10.4　ラグランジュの未定乗数法 (発展)

ここでは「ラグランジュの未定乗数法」について説明します．「ラグランジュの未定乗数法」とは制約つき最適化問題に対する解法の 1 つです．具体的には, 新たに 未定乗数 (ラグランジュ乗数) とよばれる変数 λ を用意して, 制約つきの最適化問題を制約なしの最適化問題に帰着する方法です．[*3]

以下, 制約条件 $g(x,y)=0$ の下で (制約条件の右辺が 0 であることに注意), 目的関数 $f(x,y)$ を最大 (あるいは最小) とする最適化問題を考えます (変数が増えても同じです).

定義 10.8. 目的関数 $f(x,y)$ 及び制約条件 $g(x,y)=0$ に対して, 3 変数関数 $L(x,y,\lambda)$ を

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y) \tag{10.3}$$

で定める

注意 10.9. $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ で定める場合もありますが, この違いは "数学的には" 本質的ではありません.

命題 10.10 (ラグランジュの未定乗数法)**.** 上記の制約つき最適化問題の解は, 関数 $L(x,y,\lambda)$ の停留点である．すなわち, 連立方程式

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \tag{10.4}$$

の解である．

例 10.11. 目的関数が $f(x,y)=x^2+y^2$, 制約条件が $x+2y=5$ のとき, ラグランジュの未定乗数法を用いて最適解を求める:

- 制約条件は $x+2y=5$, すなわち, $x+2y-5=0$.
- そこで,

  $$L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)-\lambda(x+2y-5)=x^2+y^2-\lambda x-2\lambda y+5\lambda$$

  とおく．
- このとき $L(x,y,\lambda)$ の停留点は, 連立方程式

  $$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=2y-2\lambda=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=-x-2y+5=0 \end{cases}$$

  を解いて, $(x,y,\lambda)=(1,2,2)$.
- 以上より, $(x,y)=(1,2)$.

[*3] λ はギリシャ文字 Λ (ラムダ; lambda) の小文字です．未定乗数を表す文字としてよく用いられます．

11　経済数学入門 II (2018/12/12)：効用の最大化

ここでは, 予算制約下での効用関数の最大化問題を考えます.

以下, 2 つの財 X, Y を消費する際の効用関数を考えます. そこで, 記号を次のように設定します:

- 財 X, Y の消費量 (購入量) をそれぞれ x, y ($x > 0$, $y > 0$),
- 効用関数を $U(x, y)$,
- 財 X, Y の価格をそれぞれ p, q,
- 消費者の所得を I.

11.1　効用の最大化

定義 11.1. 財の価格及び消費量と予算の関係を表した式を <u>予算制約式</u> という.

命題 11.2. 上記の設定の下で, 予算制約式は $px + qy = I$.

以上から, 効用の最大化問題は「効用関数 $U(x, y)$ を目的関数, 予算制約式 $px + qy = I$ を制約条件とする, 制約つき最適化問題」ととらえることができます.

したがって, 連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \dfrac{p}{q} \\ px + qy = I \end{cases} \tag{11.5}$$

を解くことで, 最適な消費量を求めることができます.

例 11.3. X, Y の価格がそれぞれ 2, 1, 所得が 3, 効用関数が $U(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ のとき,

- 公式より, $\dfrac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \dfrac{\frac{2}{3}y}{\frac{1}{3}x} = \dfrac{2y}{x}$.
- 予算制約式は $2x + y = 3$. よって, $g(x, y) = 2x + y$ とおくと, $\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = \dfrac{2}{1} = 2$.
- よって効用を最大にする最適な消費量は, $\begin{cases} \dfrac{2y}{x} = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ を解いて, $(x, y) = (1, 1)$.

11.2　効用関数に関する用語

ここでは, 効用関数に関する用語を紹介します.

定義 11.4. 効用関数 $U(x, y)$ を消費量で微分したものを <u>限界効用</u> といい, MU_x や MU_y で表す. また, 限界効用と価格の比, すなわち $\dfrac{MU_x}{p}$ や $\dfrac{MU_y}{q}$ を <u>加重限界効用</u> という.

注意 11.5. 一般に効用には「財の消費量が増加すると, 限界効用は減少する」という性質があります (限界効用逓減の法則).

次に「効用関数の等高線」を考えます.

定義 11.6. 効用関数の等高線を 無差別曲線 という. また, 無差別曲線の傾きの絶対値を 限界代替率 といい, MRS で表す.

命題 11.7. 効用関数 $U(x,y)$ に対して, 限界代替率は $MRS = \dfrac{MU_x}{MU_y}$.

注意 11.8. 一般に「財 X の消費量が増加すると, 財 Y の財 X に対する限界代替率は減少する」という性質があります (限界代替率逓減の法則).

以上の用語を用いると, 効用の最大化問題を解く際に用いた $\dfrac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \dfrac{p}{q}$ は, 次のように言い換えることができます.

命題 11.9. 点 (x,y) において, 効用が最大となるとき, 次が成り立つ.

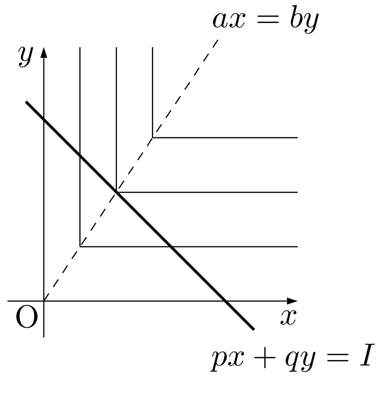
(1) $MRS = \dfrac{p}{q}$. すなわち, 限界代替率と財の価格比が一致する.

(2) $\dfrac{MU_x}{p} = \dfrac{MU_y}{q}$. すなわち, 各財の加重限界効用が一致する (加重限界効用均等の法則).

11.3 完全補完財に対する効用最大化

ここでは $U(x,y) = \min\{ax, by\}$ という効用関数 (レオンチェフ型) の最大化問題を考えます. このような関数は微分できないので, より図形的に解き方を考えます.

一般に, 等高線 $\min\{ax, by\} = c$ は L 字型のグラフになります. そして, 各等高線の角は常に直線 $ax = by$ 上に並びます.



$U(x,y) = \min\{ax, by\}$ を最大化するのは, 予算制約式のグラフが等高線の角を通ったときなので, よって, 連立方程式

$$\begin{cases} ax = by \\ px + qy = I \end{cases}$$

を解くことで, 最適な消費量を求めることができます.

例 11.10. X, Y の価格がそれぞれ 2, 1, 所得が 3, 効用関数が $U(x,y) = \min\{x,y\}$ のとき, 効用を最大にする最適な消費量は, $\begin{cases} x = y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (1,1)$.

11.4　練習問題

練習問題 1. 財 X, Y の価格をそれぞれ 1, 3, 個人の所得を 9, 効用関数を $U(x,y)$ とする.

(1) 予算制約式を求めよ.

(2) $U(x,y)=x^2y$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(3) $U(x,y)=x^4y^2$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(4) $U(x,y)=x^{0.6}y^{0.3}$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(5) $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

練習問題 2. 財 X, Y の価格をそれぞれ 2, 4, 個人の所得を 24, 効用関数を $U(x, y)$ とする.

(1) 予算制約式を求めよ.

(2) $U(x, y) = \min\{x, y\}$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(3) $U(x, y) = \min\{3x, 2y\}$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

12　経済数学入門 II (2018/12/19)：指数関数・対数関数

ここでは, 指数関数と対数関数について復習します.

12.1　累乗と指数関数

ここでは, 累乗について復習し, 指数関数を定義します.

定義 12.1. $a > 0$ に対して, a^x を次のように定義する:

(1) x が自然数のとき, $a^n =$ "a を n 回かけた数",

(2) x が 0 のとき, $a^0 = 1$,

(3) x が負の整数のとき, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

(4) x が有理数 (分数) のとき, $a^{\frac{n}{m}} =$ "m 回かけると a^n になる正の数".

注意 12.2. x がそれ以外のときにも, 然るべく定義されます (極限を用いる).

以上により, すべての実数 x に対して, a^x が定義されました.

命題 12.3 (指数法則)**.** 次が成り立つ:

(1) $a^0 = 1, \quad a^1 = a,$

(2) $a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$

(3) $(a^x)^y = a^{xy},$

(4) $(ab)^x = a^x b^x, \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}.$

定義 12.4. $a > 0$, $a \neq 1$ のとき, 関数 $y = a^x$ を (a を底とする) <u>指数関数</u> という.

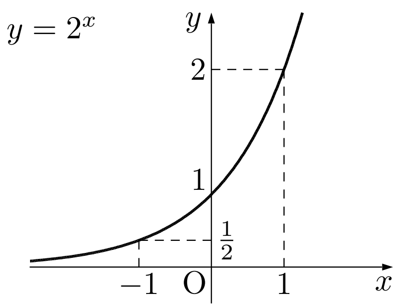
命題 12.5. 指数関数 $y = a^x$ に対して, 次が成り立つ:

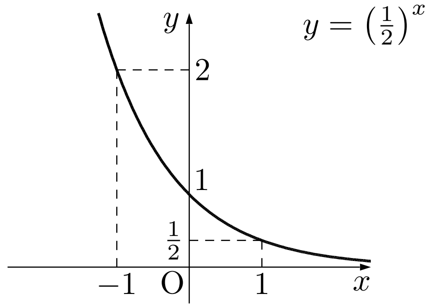
(1) 関数の定義域は「実数」全体, 値域は「正の実数」全体.

(2) グラフは点 $(0, 1)$, $(1, a)$ を通り, x 軸を漸近線とする.

(3) (i) $a > 1$ のとき, 関数は単調増加, すなわち, $p < q \;\Leftrightarrow\; a^p < a^q$.

　(ii) $0 < a < 1$ のとき, 関数は単調減少, すなわち, $p < q \;\Leftrightarrow\; a^p > a^q$.





12.2　対数と対数関数

方程式 $2^x = 8$ の解は $x = 3$ と明確に求めることができますが, 方程式 $2^x = 5$ の解となると, 自然数の範囲では存在しません. しかし, 指数関数のグラフから実数解がただ 1 つ存在することが分かるので, その値を新しい記号を用いて表すことにします.

定義 12.6. $a > 0$, $a \neq 1$, 及び $M > 0$ に対して, $a^x = M$ を満たす実数 x を $\log_a M$ と表す. これを <u>対数</u> という. また, a を <u>底</u>, M を <u>真数</u> という.

命題 12.7. 次が成り立つ:

(1) $\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1,$

(2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$

(3) $\log_a x^r = r \log_a x,$　特に $\log_a a^r = r.$

例 12.8. 次が成り立つ:

(1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$

(2) $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3.$　または, $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3.$

練習問題 1. 次の値を求めよ.

(1) $\log_2 32 =$

(2) $\log_3 27 =$

(3) $\log_2 \dfrac{1}{2} =$

(4) $\log_3 \dfrac{1}{9} =$

例 12.9. 次が成り立つ:

(1) $\log_2 18 + \log_2 \dfrac{4}{9} = \log_2 \left(18 \cdot \dfrac{4}{9}\right) = \log_2 8 = 3.$

(2) $\log_3 \dfrac{5}{6} - \log_3 \dfrac{5}{2} = \log_3 \left(\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{2}{5}\right) = \log_3 \dfrac{1}{3} = -1.$

(3) $2\log_3 \dfrac{5}{6} + \log_3 \dfrac{4}{25} = \log_3 \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 + \log_3 \dfrac{4}{25} = \log_3 \left(\dfrac{25}{36} \cdot \dfrac{4}{25}\right) = \log_3 \dfrac{1}{9} = -2.$

練習問題 2. 次の値を求めよ.

(1) $\log_2 6 + \log_2 \dfrac{4}{3} =$

(2) $\log_2 \dfrac{3}{10} + \log_2 \dfrac{5}{3} =$

(3) $\log_3 \dfrac{5}{3} - \log_3 15 =$

(4) $2\log_{10} 2 - \log_{10} \dfrac{8}{15} + \log_{10} \dfrac{4}{3} =$

定義 12.10. $a > 0$, $a \neq 1$ のとき, 関数 $y = \log_a x$ を (a を底とする) 対数関数 という. [*4]

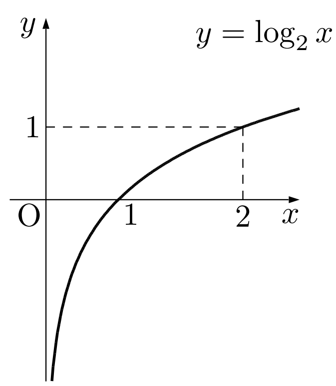
命題 12.11. 対数関数 $y = \log_a x$ に対して, 次が成り立つ:

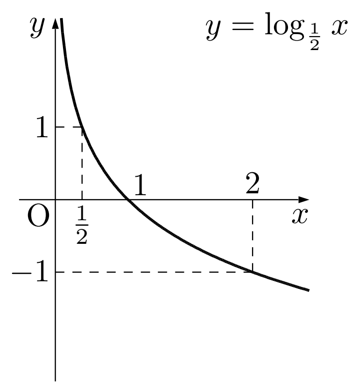
(1) 関数の定義域は「正の実数」全体, 値域は「実数」全体.

(2) グラフは点 $(1, 0)$, $(a, 1)$ を通り, y 軸を漸近線とする.

(3) (i) $a > 1$ のとき, 関数は単調増加, すなわち, $p < q \iff \log_a p < \log_a q$.

(ii) $0 < a < 1$ のとき, 関数は単調減少, すなわち, $p < q \iff \log_a p > \log_a q$.





[*4] 定義から, 指数関数と対数関数は「逆関数」の関係にあります. すなわち,

- $\log_a a^x = x$ 及び $a^{\log_a x} = x$ が成り立つ.
- $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフは $y = x$ を軸として対称の位置にある.

12.3　常用対数

ここでは「底が 10 の対数 (常用対数)」を利用して, 与えられた数の桁数を求めます (常用対数を用いるのは, 我々が数を 10 進法で表しているから).

定義 12.12. 底が 10 の対数 $\log_{10} x$ を 常用対数 という.

命題 12.13. 次が成り立つ:

(1) n 桁の自然数の内, 最小の自然数は 10^{n-1}, 最大の自然数は $10^n - 1$.

(2) x が n 桁の自然数 $\Leftrightarrow$ $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ $\Leftrightarrow$ $n-1 \leqq \log_{10} x < n$.

よって, $\log_{10} x$ の値が分かると, x の桁数を求めることができます.

例 12.14. 近似値 $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ を利用して, 2^{100} の桁数を求める.

- $\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 \fallingdotseq 100 \times 0.3010 = 30.10$.
- よって, $30 < \log_{10} 2^{100} < 31$ なので, 2^{100} は 31 桁の数.

練習問題 3. 近似値 $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ を利用して, 次の数の桁数を求めよ.

(1) 2^{60}

(2) 3^{40}

(3) 6^{20}

13　経済数学入門 II (2019/01/09)：対数関数の微分

13.1　対数関数の微分

ここでは, 自然対数を定義し, その微分を計算します.

定義 13.1. 「$x=1$ を代入すると 0 になり, 微分すると $\dfrac{1}{x}$ になる関数」を $\ln(x)$ と表す. これを 自然対数 という. [*5]

自然対数を含む関数の微分は次の公式を用います.

命題 13.2. $(\ln(f(x)))' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

例 13.3. 次が成り立つ.

(1) $\big(\ln(x^2+3x)\big)' = \dfrac{(x^2+3x)'}{x^2+3x} = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$.

(2) $(\ln(3x))' = \dfrac{(3x)'}{3x} = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$.

練習問題 1. 次の微分を求めよ.

(1) $\big(\ln(x^2-3)\big)' =$

(2) $\big(\ln(x^3+2x)\big)' =$

(3) $(\ln(2x))' =$

(4) $\big(\ln(x^2)\big)' =$

(5) $\big(\ln(3x^2)\big)' =$

[*5] 正確には, 積分 (微分の逆) を用いて $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義します.

自然対数は文字通り, 対数関数の特別な場合になります.

命題 13.4. ある定数 e を用いて, $\ln(x) = \log_e x$ と表される. [*6]

対数の性質を利用することで, 微分を簡単に求めることができる場合があります.

命題 13.5. 次が成り立つ.

(1) $\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1.$

(2) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$

(3) $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x).$

例 13.6. 次が成り立つ.

(1) $(\ln(3x))' = (\ln(3) + \ln(x))' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}.$

(2) $\left(\ln(x^3)\right)' = (3 \cdot \ln(x))' = 3 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x}.$

(3) $(\ln(3^x))' = (x \cdot \ln(3))' = 1 \cdot \ln(3) = \ln(3).$

練習問題 2. 次の微分を求めよ.

(1) $(\ln(2x))' =$

(2) $\left(\ln(x^2)\right)' =$

(3) $(\ln(2^x))' =$

(4) $\left(\ln(3x^2)\right)' =$

(5) $\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)' =$

---

*6 定数 e は $e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 2.71828\cdots$ で定義され, 自然対数の底 と呼ばれます.

13.2　対数関数の偏微分

ここでは自然対数を含む 2 変数関数の偏微分を計算します.

例 13.7. 次が成り立つ.

(1) $f(x,y) = \ln(x^2y^3)$ のとき,

$f(x,y) = \ln(x^2) + \ln(y^3) = 2\ln(x) + 3\ln(y)$ なので,

- $f_x(x,y) = (2\ln(x) + 3\ln(y))_x = \dfrac{2}{x}$,
- $f_y(x,y) = (2\ln(x) + 3\ln(y))_y = \dfrac{3}{y}$.
- よって, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}} = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{y}{3} = \dfrac{2y}{3x}$.

注意 13.8. $\dfrac{\text{分数}}{\text{分数}}$ は次のように計算します: $\dfrac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}} = \dfrac{a}{x} \div \dfrac{b}{y} = \dfrac{a}{x} \times \dfrac{y}{b} = \dfrac{ay}{bx}$.

練習問題 3. 次の $f(x,y)$ に対して, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 及び $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = \ln(x^4y^2)$

- $f_x(x,y) =$
- $f_y(x,y) =$
- $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} =$

(2) $f(x,y) = \ln(x^2y)$

(3) $f(x,y)=\ln(x^{0.6}y^{0.3})$

(4) $f(x,y)=\ln(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}})$

一般に次が成り立ちます.

命題 13.9. $f(x,y)=\ln(x^a y^b)$ に対して, $\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\dfrac{ay}{bx}$.

練習問題 4. 財 X, Y の価格をそれぞれ 1, 3, 個人の所得を 9 とする.

(1) 予算制約式を求めよ.

(2) 効用関数が $U(x,y)=\ln(x^4y^2)$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

13.3 複利計算 (発展)

ここでは指数・対数を利用した複利計算について補足します.

銀行に年利 5% (= 0.05) で 1 万円を預金したとします. すると, 1 年後には $10,000 \times 0.05 = 500$ 円の利息がつき, 合わせて 10,500 円となります. では, 2 年後の利息はいくらになるでしょうか？この計算方法には「単利」と「複利」の 2 種類があります.

定義 13.10. 毎年, 元本に関して利子を計算する方法を 単利, 前年までの利息を含めた金額に関して利子を計算する方法を 複利 という.

例 13.11. 年利 3% (= 0.03) で 1 万円を預金したとき, 複利計算では,

- 1 年後には, $10,000 \times (1 + 0.03) = 10,300$,
- 2 年後には, $10,300 \times (1 + 0.03) = 10,609$,
- 一般に x 年後には, $10,000 \times (1 + 0.03)^x$ となる.

命題 13.12. 年利 r% で M 円を預金したとき, 複利計算では, x 年後に $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x M$.

ここで「72 の法則」(「69 の法則」や「70 の法則」とも呼ばれる) について説明します.

命題 13.13. 年利 r% (複利) で預金したとき, 元本が 2 倍になるのは約 $\frac{72}{r}$ 年後.

これは次のように説明されます: $h = \frac{r}{100}$ とおきます. r が十分小さいとき h も十分小さいので, $(1+h)^{\frac{1}{h}} \fallingdotseq e$ が成り立ちます. よって複利計算では, x 年後に

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x M = (1+h)^x M = \left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{hx} M \fallingdotseq e^{hx} M = e^{\frac{rx}{100}} M$$

となります. これが元本の 2 倍, すなわち, $2M$ になるためには $e^{\frac{rx}{100}} = 2$ となればよいので, 両辺に自然対数をとって,

$$\frac{rx}{100} = \ln(2), \qquad \text{すなわち,} \qquad x = \frac{100 \cdot \ln(2)}{r}.$$

ここで $\ln(2) = 0.69 \cdots \fallingdotseq 0.72$ と近似すると, $x = \frac{72}{r}$ となります.

例 13.14. 年利 3% (複利) で預金したとき, 元本が 2 倍になるのは約 $\frac{72}{3} = 24$ 年後. 実際, 1 万円を預金したとき, 24 年後には

$$10,000 \times (1 + 0.03)^{24} = 20,327.941 \cdots$$

となります.

14　経済数学入門 II (2019/01/16)：労働と余暇

14.1　労働と余暇

我々は「労働 (labor)」によって「賃金 (wage)」を得て, それらの「所得 (income)」をもとに財を「消費」することで効用を得ると考えることができます. 一方で, 労働しない時間を「余暇 (leisure)」とすることでそれ自体で効用を得ることもできます.

ここでは「余暇」と「1 つの財の消費」に対する効用を考え, 効用の最大化問題を解くことで, 最適な労働時間を求めます.

そこで, 次のように設定します:

- 余暇時間を x, 労働賃金率を w,
- 財 Y の消費量 (購入量) を y, 財の価格を p,
- 効用関数を $u(x, y)$.

また余暇時間や労働時間の単位は「時間」として, その合計を「24 時間」とします. *7 この状況下では次が成り立ちます.

命題 14.1. 次が成り立つ. *8

(1) 1 日の労働時間は $L = 24 - x$,

(2) 予算制約式 (予算 = 所得) は $py = w(24 - x)$, すなわち, $wx + py = 24w$.

練習問題 1. 次の場合に, 予算制約式を求めよ.

(1) 財の価格が 1, 労働賃金率が 3

(2) 財の価格が 1, 労働賃金率が 4

(3) 財の価格が 2, 労働賃金率が 3

*7 時間の単位や余暇時間や労働時間の合計は問題によって変わります. 例えば, 時間の単位を「日」として, 余暇時間や労働時間の合計を「365 日」とする場合もあります.

*8 時間の単位を「日」として, 余暇時間や労働時間の合計を「365 日」とすると, 労働時間は $L = 365 - x$, 予算制約式は $wx + py = 365w$ となります.

ここでの問題は, 予算制約式 (制約条件) $wx + py = 24w$ の下で, 効用関数 (目的関数) $u(x, y)$ の最大化問題です. よって, 次の連立方程式を解けばよいことになります:

$$\begin{cases} \dfrac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)} = \dfrac{w}{p} \\ wx + py = 24w \end{cases} \tag{14.6}$$

注意 14.2. 上記の連立方程式に表れた $\dfrac{w}{p}$ は **実質賃金 (率)** と呼ばれます. 実質賃金率を w' とすると, 予算制約式は $w'x + y = 24w'$ となります.

例 **14.3.** 財 Y の価格が 1, 労働賃金率が 3, 効用関数が $u(x, y) = x^4y^2$ のとき,

- 予算制約式は $1 \cdot y = 3 \cdot (24 - x)$, すなわち, $3x + y = 72$.
- 公式より $\dfrac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)} = \dfrac{4y}{2x} = \dfrac{2y}{x}$.
  また $\dfrac{(3x+y)_x}{(3x+y)_y} = \dfrac{3}{1} = 3$. (あるいは $\dfrac{w}{p} = \dfrac{3}{1} = 3$.)
- よって, 効用 $u(x, y)$ を最大にする (x, y) は,

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x} = 3, \text{ すなわち, } 3x = 2y \\ 3x + y = 72 \end{cases}$$

  を解いて, $(x, y) = (16, 24)$.
- したがって, そのときの最適な労働時間は $L = 24 - 16 = 8$.

例 **14.4.** 財の価格が 1, 労働賃金率が 1, 効用関数が $u(x, y) = -\dfrac{1}{2}x^2 + xy + 25x$ のとき,

- 予算制約式は $1 \cdot y = 1 \cdot (24 - x)$, すなわち, $x + y = 24$.
- 直接計算より, $\dfrac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)} = \dfrac{-x+y+25}{x}$.
  また $\dfrac{(x+y)_x}{(x+y)_y} = \dfrac{1}{1} = 1$. (あるいは $\dfrac{w}{p} = \dfrac{1}{1} = 1$.)
- よって, 効用 $u(x, y)$ を最大にする (x, y) は,

$$\begin{cases} \dfrac{-x+y+25}{x} = 1, \text{ すなわち, } 2x - y = 25 \\ x + y = 24 \end{cases}$$

  を解いて, $(x, y) = (\dfrac{49}{3}, \dfrac{23}{3})$.
- したがって, そのときの最適な労働時間は $L = \dfrac{23}{3} = 7\dfrac{40}{60}$, すなわち, 7 時間 40 分.

14.2 練習問題

練習問題 2. 財の価格を 1, 労働賃金率を 3, 効用関数を $u(x, y) = x^5 y^3$ とする.

(1) 予算制約式を求めよ.

(2) 効用を最大にする x, y の値を求めよ. また, 最適な労働時間 L $(= 24 - x)$ を求めよ.

(3) 労働賃金率 (時給) が 4 に変わったとき, 最適な労働時間 L を求めよ.

(4) 一般に, 労働賃金率 (時給) が w のとき, 最適な労働時間 L を求めよ. (発展問題)