数学通論 I 演習：演習問題 (No. 1)・解答

問 1-A $A \subset \mathbb{R}$ とする. 関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対して, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$ を f の「グラフ」という.

(1) $B := \{(t+1, t^2-2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ はある関数 $f : A \to \mathbb{R}$ のグラフとして表されることを示せ.

(2) $C := \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ はどんな関数 $f : A \to \mathbb{R}$ のグラフとしても表されないことを示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists A \subset \mathbb{R}, \exists f : A \to \mathbb{R}$: 関数 s.t. $B = \Gamma_f$. ］

$A := \mathbb{R}$ とし, 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = (x-1)^2 - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める. このとき,

$$\begin{aligned} B &= \{(t+1, t^2-2) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, (x-1)^2 - 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \Gamma_f \end{aligned}$$

が成り立つ. よって示された. □

(2) ［示すこと：$\forall A \subset \mathbb{R}, \forall f : A \to \mathbb{R}$: 関数, $C \neq \Gamma_f$. ］

任意に $A \subset \mathbb{R}$ および関数 $f : A \to \mathbb{R}$ をとる. $C \neq \Gamma_f$ を背理法で示す. すなわち, $C = \Gamma_f$ と仮定する. このとき,

- $(0,1) \in C = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ なので, $f(0) = 1$,
- $(0,-1) \in C = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ なので, $f(0) = -1$

となり, これは f が関数 (写像) であることに矛盾する. よって, $C \neq \Gamma_f$ が示された. □

【補足】

- この問題のポイントは「集合がある関数のグラフで表される」ということを, 論理記号を用いて書けるかどうかでした (そのためにあえて問題文の表現を濁して出題しています). 数学的な定義や命題が与えられた際は常に「論理記号を用いて正確に書くとどうなるだろう」と考える習慣をつけてください.

問 1-B X を集合とする．次が成り立つことを示せ．

(1) X の部分集合 A, B に対して，$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$．

(2) X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$．

【解答】

(1) ［示すこと：$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$．］

まず $(\Rightarrow)$ を示す．$A \cap B = \emptyset$ とする．$A \subset B^c$ を示すために，$\forall x \in A$ をとる．ここで，$x \in B$ と仮定すると，$x \in A \cap B$ となり，$A \cap B = \emptyset$ に矛盾する．よって，$x \notin B$，すなわち，$x \in B^c$ である．以上で，$A \subset B^c$ が示された．

次に $(\Leftarrow)$ を示す．$A \subset B^c$ とする．$A \cap B = \emptyset$ を背理法で示す．すなわち，$A \cap B \neq \emptyset$ と仮定する．すると，

$$\exists x \in X \text{ s.t. } x \in A \cap B$$

が成り立つ．よって，$x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ．すると，$x \in A$ と仮定から $x \in B^c$ となり，$x \in B$ に矛盾する．よって，$A \cap B = \emptyset$ が示された． □

(2) ［示すこと：$\forall x \in X,\, x \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$．］

任意に $x \in X$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned}
x \in \left(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c &\Leftrightarrow \neg\left(x \in \textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) && \text{(補集合の定義)} \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall\lambda \in \Lambda,\, x \in A_\lambda) && \text{(共通部分の定義)} \\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } \neg(x \in A_\lambda) && \text{(否定命題の性質)} \\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda^c && \text{(補集合の定義)} \\
&\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c && \text{(和集合の定義)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって示された． □

【補足】

- (1) は命題の同値変形で，次のように示すこともできます:

$$\begin{aligned}
A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow \forall x \in X,\, \neg(x \in A \cap B) && \text{(空集合であることの定義)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X,\, \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{(共通部分の定義)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X,\, \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && \text{(ド・モルガンの定理)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X,\, \neg(x \in A) \vee (x \in B^c) && \text{(補集合の定義)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X,\, (x \in A \Rightarrow x \in B^c) && \text{(含意 } (\Rightarrow) \text{ の定義)} \\
&\Leftrightarrow A \subset B^c && \text{(包含関係 } (\subset) \text{ の定義)}
\end{aligned}$$

問 1-C 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ で定める.

(1) f は全射でも単射でもないことを示せ.

(2) f は連続であることを (ε-δ 論法を用いて) 示せ.

【解答】

(1) [示すこと１：f は全射でない, i.e., $\exists y\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$, $y\neq f(x)$.]

$y:=-1\in\mathbb{R}$ とおく. 任意に $x\in\mathbb{R}$ をとる. このとき,

$$y=-1<0\leq x^2=f(x)$$

なので, $y\neq f(x)$ が成り立つ. よって, f は全射でない.

[示すこと２：f は単射でない, i.e., $\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$ s.t. $x_1\neq x_2$ かつ $f(x_1)=f(x_2)$.]

$x_1:=1$, $x_2:=-1\in\mathbb{R}$ とおく. このとき,

- 明らかに $x_1\neq x_2$,
- $f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$ なので, $f(x_1)=f(x_2)$.

よって, f は単射でない.

以上により, f は全射でも単射でもない. □

(2) f が各点で連続であることを示す. 任意に $a\in\mathbb{R}$ をとる.

[示すこと：$\forall\varepsilon>0$, $\delta>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.]

任意に $\varepsilon>0$ をとる.

$$\delta:=\min\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\}>0$$

とおく. 任意に $x\in\mathbb{R}$ をとり, $|x-a|<\delta$ とする. このとき,

- $0\leq|x-a|<\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}$,
- $0\leq|x+a|\leq|x-a|+|2a|<\delta+2|a|\leq 1+2|a|$

が成り立つことに注意すると,

$$|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x+a|\cdot|x-a|<(1+|2a|)\cdot\frac{\varepsilon}{1+2|a|}=\varepsilon$$

が成り立つ. よって, f は連続である. □