数学通論 I 演習：演習問題 (No. 2)・解答

問 2-A $A := (-1, 2] \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 0 が A の内点であることを定義に従って示せ.

(2) 点 2 が A の内点でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(0;\varepsilon) \subset A$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく.

［**claim**：$U(0;\varepsilon) \subset A$, i.e., $\forall x \in U(0;\varepsilon)$, $x \in A$. ］

任意に $x \in U(0;\varepsilon)$ をとる. このとき, $|x| < 1$ より $-1 < x < 1$ なので, $x \in (-1, 2] = A$ が成り立つ.

以上により, 0 が A の内点であることが示された. □

(2) ［示すこと：$\forall \varepsilon > 0$, $U(2;\varepsilon) \not\subset A$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

［**claim**：$U(0;\varepsilon) \not\subset A$, i.e., $\exists x \in U(2;\varepsilon)$ s.t. $x \notin A$. ］

$x := 2 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}$ とおく. すると,

- $|x - 2| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より, $x \in U(2;\varepsilon)$,
- $2 < x$ より, $x \notin A$

が成り立つ.

以上により, 2 が A の内点でないことが示された. □

問 2-B $B := [3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 4 が B の内点であることを定義に従って示せ.

(2) 点 3 が B の内点でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(4;\varepsilon) \subset B$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく.

［**claim**：$U(4;\varepsilon) \subset B$, i.e., $\forall x \in U(4;\varepsilon)$, $x \in B$. ］

任意に $x \in U(4;\varepsilon)$ をとる．このとき，$|x-4| < 1$ より，$3 < x < 5$ なので，$x \in B$ が成り立つ．

以上により，4 が B の内点であることが示された． □

(2) ［示すこと：$\forall \varepsilon > 0$, $U(3;\varepsilon) \not\subset B$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．

［**claim**：$U(3;\varepsilon) \not\subset B$, i.e., $\exists x \in U(3;\varepsilon)$ s.t. $x \notin B$. ］

$x := 3 - \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，

- $|x-3| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より，$x \in U(3;\varepsilon)$,
- $x < 3$ より，$x \notin B$

が成り立つ．

以上により，3 が B の内点でないことが示された． □

問 2-C $C := (-1,2] \cup [3,\infty) \subset \mathbb{R}$ とおく．

(1) 点 0 が C の内点であることを定義に従って示せ．

(2) 点 3 が C の内点でないことを定義に従って示せ．

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(0;\varepsilon) \subset C$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく．

［**claim**：$U(0;\varepsilon) \subset C$, i.e., $\forall x \in U(0;\varepsilon)$, $x \in C$. ］

任意に $x \in U(0;\varepsilon)$ をとる．このとき，$|x| < 1$ より，$-1 < x < 1$ なので，$x \in C$ が成り立つ．

以上により，0 が C の内点であることが示された． □

(2) ［示すこと：$\forall \varepsilon > 0$, $U(3;\varepsilon) \not\subset C$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．

［**claim**：$U(3;\varepsilon) \not\subset C$, i.e., $\exists x \in U(3;\varepsilon)$ s.t. $x \notin C$. ］

$\varepsilon' := \min\{1,\varepsilon\} > 0$ とおき，$x := 3 - \dfrac{\varepsilon'}{2} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，

- $|x-3| = \dfrac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon' \leq \varepsilon$ より，$x \in U(3;\varepsilon)$,

- $2 < \dfrac{5}{2} \leq 3 - \dfrac{\varepsilon'}{2} = x < 3$ より, $x \notin C$

が成り立つ.

以上により, 3 が C の内点でないことが示された. □

【コメント】

- 今回の採点基準は「示すことが適切に書かれているか」「証明が示すことに従って正しく書けているか」の 2 点です. ただし, claim の証明については (1) はそれっぽいことが書かれていれば ○ にしましたが, (2) は上記のような x を適切に求めている解答のみ ○ とし, 「$2 < 2 + \varepsilon$ より $U(0; \varepsilon) \not\subset A$」のような解答は説明不足として △ にしました. 今回の問題は $\mathbb{R}$ の部分集合なので, その説明でも十分と言えなくはないのですが, 今後 $\mathbb{R}^n$ や一般の距離空間を扱う際には同様の説明だけでは証明にならない場合も増えてくると思いますので, 注意喚起も込めて減点としました.