数学通論 I 演習：演習問題 (No. 3)・解答

問 3-A $A := [-1, 2) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 2 が A の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が A の触点でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall \varepsilon > 0,\ U(2; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

［**claim**：$U(2; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, i.e., $\exists x \in U(2; \varepsilon)$ s.t. $x \in A$.］

$\varepsilon' := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 3\} > 0$ とおき, $x := 2 - \varepsilon'$ とおく. すると,

- $|x - 2| = \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より, $x \in U(2; \varepsilon)$,
- $-1 = 2 - 3 \leq 2 - \varepsilon' < 2$ より, $x \in A$

が成り立つ.

以上により, 2 が A の触点であることが示された. □

(2) $x < -1$ とする.

［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset.$］

$\varepsilon := -1 - x \in \mathbb{R}$ とおく. $x < -1$ より, $\varepsilon > 0$.

［**claim**：$U(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset$, i.e., $\forall y \in U(x; \varepsilon),\ y \notin A$.］

任意に $y \in U(x; \varepsilon)$ をとる. このとき, $|x - y| < \varepsilon$ より,

$$y < x + \varepsilon = x + (-1 - x) = -1$$

なので, $y \notin A$ が成り立つ.

以上により, -1 が A の触点でないことが示された. □

問 3-B $B := (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が B の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < 3$ とする. 点 x が B の触点でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［**示すこと**：$\forall \varepsilon > 0,\ U(3;\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

［**claim**：$U(3;\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, i.e., $\exists x \in U(3;\varepsilon)$ s.t. $x \in B$. ］

$x := 3 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ とおく. すると,

- $|x-3| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より, $x \in U(3;\varepsilon)$,
- $3 < 3 + \dfrac{\varepsilon}{2} = x$ より, $x \in B$

が成り立つ.

以上により, 3 が B の触点であることが示された. □

(2) $x < 3$ とする.

［**示すこと**：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x;\varepsilon) \cap B = \emptyset$. ］

$\varepsilon := 3 - x \in \mathbb{R}$ とおく. $x < 3$ より, $\varepsilon > 0$.

［**claim**：$U(x;\varepsilon) \cap B = \emptyset$, i.e., $\forall y \in U(x;\varepsilon),\ y \notin B$. ］

任意に $y \in U(x;\varepsilon)$ をとる. このとき, $|x-y| < \varepsilon$ より,

$$y < x + \varepsilon = x + (3 - x) = 3$$

なので, $y \notin B$ が成り立つ.

以上により, 3 が B の触点でないことが示された. □

問 3-C $C := [-1, 2) \cup (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が C の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が C の触点でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［**示すこと**：$\forall \varepsilon > 0,\ U(3;\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

［**claim**：$U(3;\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$, i.e., $\exists x \in U(3;\varepsilon)$ s.t. $x \in C$. ］

$x := 3 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ とおく. すると,

- $|x-3| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より, $x \in U(3;\varepsilon)$,
- $3 < 3 + \dfrac{\varepsilon}{2} = x$ より, $x \in C$

が成り立つ.

以上により, 3 が C の触点であることが示された. $\square$

(2) $x < -1$ とする.

[示すこと : $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x;\varepsilon) \cap C = \emptyset$.]

$\varepsilon := -1 - x \in \mathbb{R}$ とおく. $x < -1$ より, $\varepsilon > 0$.

[**claim :** $U(x;\varepsilon) \cap C = \emptyset$, i.e., $\forall y \in U(x;\varepsilon)$, $y \notin C$.]

任意に $y \in U(x;\varepsilon)$ をとる. このとき, $|x - y| < \varepsilon$ より,

$$y < x + \varepsilon = x + (-1 - x) = -1$$

なので, $y \notin C$ が成り立つ.

以上により, -1 が C の触点でないことが示された. $\square$

【コメント】

- 今回の採点基準も「示すことが適切に書かれているか」「証明が示すことに従って正しく書けているか」の 2 点です. またこちらが「説明不足」と判断した箇所は △ にしています. 簡単に明らかで済ませるのではなく, 「何を示せば相手に有無を言わせずに説得できるか」をしっかり考えてください.