数学通論 I 演習：演習問題 (No. 4)・解答

問 4-A 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x\le 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $f(U(1;\delta))\subset U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $\varepsilon>0$ をとる. $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\} > 0$ とおく.

［**claim**：$f(U(1;\delta))\subset U(f(1);\varepsilon)$, i.e., $\forall x\in U(1;\delta)$, $f(x)\in U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $x\in U(1;\delta)$ をとる. このとき, $|x-1|<\delta\le 1$ より $0<x<2$ なので, $f(x)=2x-1$. よって,

$$|f(x)-f(1)| = |(2x-1)-1| = 2|x-1| < 2\delta \le \varepsilon$$

なので, $f(x)\in U(f(1);\varepsilon)$ が成り立つ.

以上により, f は 1 で連続であることが示された. □

(2) ［示すこと：$\exists\varepsilon>0$ s.t $\forall\delta>0$, $f(U(0;\delta))\not\subset U(f(0);\varepsilon)$. ］

$\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$ とおく. 任意に $\delta>0$ をとる.

［**claim**：$f(U(0;\delta))\not\subset U(f(0);\varepsilon)$, i.e., $\exists x\in U(0;\delta)$, $f(x)\notin U(f(0);\varepsilon)$. ］

$x := \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4}\} > 0$ とおく. すると,

- $|x-0| = x \le \frac{\delta}{2} < \delta$ より, $x\in U(0;\delta)$.
- $0 < x \le \frac{1}{4}$ より,

$$|f(x)-f(0)| = |(2x-1)-0| = 1-2x \ge \frac{1}{2} = \varepsilon$$

なので, $f(x)\notin U(f(0);\varepsilon)$.

.

以上により, -1 が A の触点でないことが示された. □

問 4-B 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x>0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $f(U(1;\delta)) \subset U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\} > 0$ とおく.

［**claim：**$f(U(1;\delta)) \subset U(f(1);\varepsilon)$, i.e., $\forall x \in U(1;\delta)$, $f(x) \in U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $x \in U(1;\delta)$ をとる. このとき, $|x-1| < \delta \leq 1$ より $0 < x < 2$ なので, $f(x) = 3x$. よって,

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x-1| < 3\delta \leq \varepsilon$$

なので, $f(x) \in U(f(1);\varepsilon)$ が成り立つ.

以上により, f は 1 で連続であることが示された. □

(2) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t $\forall \delta > 0$, $f(U(0;\delta)) \not\subset U(f(0);\varepsilon)$. ］

$\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$ とおく. 任意に $\delta > 0$ をとる.

［**claim：**$f(U(0;\delta)) \not\subset U(f(0);\varepsilon)$, i.e., $\exists x \in U(0;\delta)$ s.t. $f(x) \notin U(f(0);\varepsilon)$. ］

$x := \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{6}\} > 0$ とおく. すると,

- $|x - 0| = x \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ より, $x \in U(0;\delta)$.
- $0 < x \leq \frac{1}{6}$ より,

$$|f(x) - f(0)| = |3x - 1| = 1 - 3x \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

なので, $f(x) \notin U(f(0);\varepsilon)$.

以上により, -1 が A の触点でないことが示された. □

問 4-C 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $f(U(1;\delta))\subset U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $\varepsilon>0$ をとる. $\delta:=\min\{1,\varepsilon\}>0$ とおく.

［**claim**：$f(U(1;\delta))\subset U(f(1);\varepsilon)$, i.e., $\forall x\in U(1;\delta),\ f(x)\in U(f(1);\varepsilon)$. ］

任意に $x\in U(1;\delta)$ をとる. このとき, $|x-1|<\delta\leq 1$ より $0<x<2$ なので, $f(x)=-x+1$. よって,

$$|f(x)-f(1)|=|(-x+1)-0|=|x-1|<\delta\leq\varepsilon$$

なので, $f(x)\in U(f(1);\varepsilon)$ が成り立つ.

以上により, f は 1 で連続であることが示された. □

(2) ［示すこと：$\exists\varepsilon>0$ s.t $\forall\delta>0,\ f(U(0;\delta))\not\subset U(f(0);\varepsilon)$. ］

$\varepsilon:=1>0$ とおく. 任意に $\delta>0$ をとる.

［**claim**：$f(U(0;\delta))\not\subset U(f(0);\varepsilon)$, i.e., $\exists x\in U(0;\delta),\ f(x)\notin U(f(0);\varepsilon)$. ］

$x:=\min\{\frac{\delta}{2},1\}>0$ とおく. すると,

- $|x-0|=x\leq\frac{\delta}{2}<\delta$ より, $x\in U(0;\delta)$.
- $0<x\leq 1$ より,

$$|f(x)-f(0)|=|(-x+1)-(-1)|=2-x\geq 1=\varepsilon$$

  なので, $f(x)\notin U(f(0);\varepsilon)$.

以上により, -1 が A の触点でないことが示された. □

【コメント】

- 正しい証明が書けていない人が思ったより多かったです. 特に気になったのは,

  (1) $x>0$ を確かめずに $f(x)$ を変形している.

  (2) (ちょっと考えれば反例が思いつくような) 間違った不等式の変形をしている.

の 2 点です.

- (1) については, f の定義から, $x > 0$ か $x \leq 0$ のどちらか決まっていなければ $f(x)$ を変形することはできません. もちろん場合分けで対処することもできますが, 上の解答のように δ をうまくとることで, $|x-1| < \delta$ から $x > 0$ を導くこともできます.
- (2) については, あまりに初等的なミスであればその時点で × にしています . なんとなくこうなりそう, ではなく, ちゃんと根拠を持って式変形を行ってください.
- また連続性の証明が苦手な人が多いように感じました. ポイントは, (1) であれば δ を, (2) であれば ε, x をうまくとることです (当然ですが). その際, 式変形だけで考えるのではなく, グラフや図を描いて考えてみるのもいいと思います. 図を描いてみると, 例えば (2) で, ε を 1 以上 (**C** では 2 以上) に取ることはできないことが分かりますし, ε をうまく取ったあとで x をどの辺りから探せばいいかが分かるはずです.