数学通論 I 演習：演習問題 (No. 5)・解答

問 5-A $A := (0,2) \subset \mathbb{R}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して，$U_n := (0, 2 - \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ とおく．このとき，$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A の開被覆であることを示せ．ただし，$\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい．

(2) A がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ．ただし，(1) の結果は用いてよい．

【解答】

(1) ［示すこと１：$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \subset \mathbb{R}$：開集合．］

任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる．$U_n = (0, 2 - \frac{1}{n})$ は開区間なので，開集合である．

［示すこと２：$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, i.e., $\forall a \in B$, $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$．］

任意に $a \in A = (0,2)$ をとる．

［**claim**：$a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, i.e., $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $a \in U_n$．］

$2 - a > 0$ より，アルキメデスの原理から，

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \frac{1}{2-a} < n \tag{$*$}$$

が成り立つ．$(*)$ より，$0 < a < 2 - \frac{1}{n}$ なので，$a \in U_n$．

よって，$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ である．

以上により，$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A の開被覆であることが示された． □

(2) ［示すこと：$\exists \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：$A$ の開被覆 s.t. $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$, $A \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$．］

$U_n := (0, 2 - \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく．(1) より，$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は B の開被覆である．

任意に $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ をとる．

［**claim**：$A \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}$, i.e., $\exists a \in A$ s.t. $a \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}$．］

$a := \max\{2 - \frac{1}{n_1}, \ldots, 2 - \frac{1}{n_k}\} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，$a \in (0,2) = A$．

［**claim**：$a \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}$, i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $a \notin U_{r_i}$．］

任意に $i \in \{1, \ldots, k\}$ をとる．このとき，$a \geq 2 - \dfrac{1}{n_i}$ なので，$a \notin (0, 2 - \dfrac{1}{n_i}) = U_{r_i}$.

以上により，A がコンパクトでないことが示された． □

問 5-B $B := [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $r > 0$ に対して，$U_r := (0, r) \subset \mathbb{R}$ とおく．このとき，$\{U_r\}_{r>0}$ が B の開被覆であることを示せ．ただし，$\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい．

(2) B がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ．ただし，(1) の結果は用いてよい．

【解答】

(1) ［示すこと１：$\forall r > 0,\ U_r \subset \mathbb{R}$: 開集合．］

任意に $r > 0$ をとる．$U_r = (0, r)$ は開区間なので，開集合である．

［示すこと２：$B \subset \displaystyle\bigcup_{r>0} U_r$, i.e., $\forall b \in B,\ b \in \displaystyle\bigcup_{r>0} U_r$.］

任意に $b \in B = [1, \infty)$ をとる．

［**claim**：$b \in \displaystyle\bigcup_{r>0} U_r$, i.e., $\exists r > 0$ s.t. $b \in U_r$.］

$r := b + 1 > 0$ とおく．すると，$0 < b < r$ なので，$b \in (0, r) = U_r$.

したがって，$B \subset \displaystyle\bigcup_{r>0} U_r$ である．

以上により，$\{U_r\}_{r>0}$ は B の開被覆であることが示された． □

(2) ［示すこと：$\exists \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: B の開被覆 s.t. $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda,\ B \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$.］

$U_r := (0, r) \subset \mathbb{R}$ $(r > 0)$ とおく．(1) より，$\{U_r\}_{r>0}$ は B の開被覆である．

任意に $r_1, \ldots, r_k > 0$ をとる．

［**claim**：$B \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\exists b \in B$ s.t. $b \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$.］

$b := \max\{1, r_1, \ldots, r_k\} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，$b \geq 1$ なので，$b \in [1, \infty) = B$.

［**claim**：$b \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ b \notin U_{r_i}$.］

任意に $i \in \{1, \ldots, k\}$ をとる．このとき，$b \geq r_i$ なので，$b \notin (0, r_i) = U_{r_i}$.

以上により，B がコンパクトでないことが示された． □

問 5-C $C := (-2, 1] \subset \mathbb{R}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\lambda \in (0, 2)$ に対して，$U_\lambda := (-\lambda, \lambda) \subset \mathbb{R}$ とおく．このとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in (0,2)}$ が C の開被覆であることを示せ．ただし，開区間が開集合であることは用いてよい．

(2) C がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ．ただし，(1) の結果は用いてよい．

【解答】

(1) ［示すこと１：$\forall \lambda \in (0, 2),\ U_\lambda \subset \mathbb{R}$：開集合．］

任意に $\lambda \in (0, 2)$ をとる．$U_\lambda = (-\lambda, \lambda)$ は開区間なので，開集合である．

［示すこと２：$C \subset \bigcup_{\lambda \in (0,2)} U_\lambda$, i.e., $\forall c \in C,\ c \in \bigcup_{\lambda \in (0,2)} U_\lambda$．］

任意に $c \in C = (-2, 1]$ をとる．

［**claim**：$c \in \bigcup_{\lambda \in (0,2)} U_\lambda$, i.e., $\exists \lambda \in (0, 2)$ s.t. $c \in U_\lambda$．］

$\lambda := \dfrac{|c| + 2}{2} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，$|c| \in [0, 2)$ なので，$0 \leq |c| < \lambda < 2$．よって，$\lambda \in (0, 2)$ であり，また $c \in (-\lambda, \lambda) = U_\lambda$ が成り立つ．

したがって，$C \subset \bigcup_{\lambda \in (0,2)} U_\lambda$ である．

以上により，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in (0,2)}$ は C の開被覆であることが示された． $\square$

(2) ［示すこと：$\exists \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$：$C$ の開被覆 s.t. $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda,\ C \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$．］

$U_\lambda := (-\lambda, \lambda) \subset \mathbb{R}\ (\lambda \in (0, 2))$ とおく．(1) より，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in (0,2)}$ は C の開被覆である．

任意に $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in (0, 2)$ をとる．

［**claim**：$C \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$, i.e., $\exists c \in C$ s.t. $c \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$．］

$c := \min\{-\lambda_1, \ldots, -\lambda_k\} \in \mathbb{R}$ とおく．すると，$c \in (-2, 0)$ なので，$c \in (-2, 1] = C$．

［**claim**：$c \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$, i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ c \notin U_{\lambda_i}$．］

任意に $i \in \{1, \ldots, k\}$ をとる．このとき，$c \leq -\lambda_i$ なので，$c \notin (-\lambda_i, \lambda_i) = U_{\lambda_i}$．

以上により，C がコンパクトでないことが示された． $\square$

【コメント】

- コンパクト性は重要な概念であると同時に, 定義が非常に分かりづらいです (数学通論 I で最も難しいと言っても過言ではありません). まずはいろいろな例題を考えて, その定義に慣れていってください.

- コンパクト性を扱う上で「開被覆」という概念がありますが, この辺りから「部分集合」「部分集合の和集合」「部分集合族」を混同する人が増えてきます (久保の教育上の経験則). 正しい使い方をマスターしてください. 例えば次のような例はすべて間違った書き方ですが, どこが間違っていて, どう直せばいいか分かりますか？(すべて今回の答案で実際に書かれていたものです):

    - $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は A の開集合
    - $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は A の開被覆
    - $A \subset \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
    - $U_\lambda \in \mathbb{R}$
    - $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}$

- 採点基準ですが, 誤答の内容によって △ または × をつけています .

- また (1) では, 例えば **問 5-B** で, 「$\displaystyle\bigcup_{r>0} U_r = (0,\infty)$」を使っている答案は「そこも示してほしい」ということで △ にしています. 一方, (2) で $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i} = (0, r_0)$ のように書いている答案は (あまりに多かったので) 見逃すことにしました. いずれも直感的には明らかといってもいいですが, 実際に証明しろと言われたら証明できるようにしてください. また, コンパクトでないことを示す上で, 実はどちらの和集合も求める必要がないという点にも注意してください. (実際, 解答例では $\displaystyle\bigcup_{r>0} U_r$ や $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$ が何になるのかは求めていません).

- 存在性を示すのに「Archimedes の原理」「実数の非有界性」「実数の稠密性」「有理数の稠密性」を用いている答案がありました. 正しく用いているのであれば問題ないのですが, それぞれの主張を勘違いしていると思われる答案もありましたので, ここで復習しておきます (下記以外にもいろいろなバージョンがあります):

  Archimedes の原理 $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

  実数の非有界性 $\mathbb{R}$ は (上に) 有界ではない, すなわち, $\forall M > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x > M$.

  実数の稠密性 $\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a < b), \exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $a < c < b$.

  有理数の稠密性 $\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a < b), \exists r \in \mathbb{Q}$ s.t. $a < r < b$.