数学通論 I 演習：演習問題 (No. 6)・解答

問 6-A $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (k^2, \dfrac{1}{k^3})$ $(k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall a \in \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N$ s.t. $x_k \notin U(a; \varepsilon)$. ］

任意に $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる. $\varepsilon := 1 > 0$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる. Archimedes の原理より,

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq \max\{N, a_1 + 1\}$$

が成り立つ. このとき, $k \geq N$ である.

［**claim**：$x_k \notin U(a; \varepsilon)$, i.e., $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$. ］

$n^2 \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$ に注意すると, $k^2 \geq k \geq a_1 + 1$ が成り立つので,

$$\|x_k - a\| = \sqrt{(k^2 - a_1)^2 + \left(\frac{1}{k^3} - a_2\right)^2} \geq \left|k^2 - a_1\right| \geq k^2 - a_1 \geq 1 = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, $\{x_k\}$ は収束しないことが示された. □

(2) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k, l \geq N$ s.t. $\|x_k - x_l\| \geq \varepsilon$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる.

$$k := N + 1, \quad l := N \geq N$$

とおく. すると,

$$\|x_k - x_l\| = \sqrt{(k^2 - l^2)^2 + \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{l^3}\right)^2} \geq \left|k^2 - l^2\right| = 2N + 1 > 1 = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことが示された. □

問 6-B $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (2^k, \dfrac{1}{3^k})$ $(k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall a \in \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N$ s.t. $x_k \notin U(a; \varepsilon)$. ］

任意に $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる. $\varepsilon := 1 > 0$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる. Archimedes の原理より,

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq \max\{N, a_1 + 1\}$$

が成り立つ. このとき, $k \geq N$ である.

［**claim**：$x_k \notin U(a; \varepsilon)$, i.e., $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$. ］

$2^n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$ に注意すると, $2^k \geq k \geq a_1 + 1$ が成り立つので,

$$\|x_k - a\| = \sqrt{(2^k - a_1)^2 + \left(\frac{1}{3^k} - a_2\right)^2} \geq \left|2^k - a_1\right| \geq 2^k - a_1 \geq 1 = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, $\{x_k\}$ は収束しないことが示された. □

(2) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k, l \geq N$ s.t. $\|x_k - x_l\| \geq \varepsilon$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる.

$$k := N + 1, \quad l := N \geq N$$

とおく. すると,

$$\|x_k - x_l\| = \sqrt{(2^k - 2^l)^2 + \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^l}\right)^2} \geq \left|2^k - 2^l\right| = 2^N > 1 = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことが示された. □

問 6-C $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (\sqrt{k}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}})$ $(k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall a \in \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N$ s.t. $x_k \notin U(a;\varepsilon)$. ］

任意に $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる．$\varepsilon := 1 > 0$ とおく．任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる．Archimedes の原理より,

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq \max\{N, (a_1+1)^2\}$$

が成り立つ．このとき, $k \geq N$ である．

［**claim**：$x_k \notin U(a;\varepsilon)$, i.e., $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$. ］

k の定義から, $\sqrt{k} \geq a_1 + 1$ なので,

$$\|x_k - a\| = \sqrt{\left(\sqrt{k} - a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - a_2\right)^2} \geq \left|\sqrt{k} - a_1\right| \geq \sqrt{k} - a_1 \geq 1 = \varepsilon$$

が成り立つ．以上により, $\{x_k\}$ は収束しないことが示された． □

(2) ［示すこと：$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k, l \geq N$ s.t. $\|x_k - x_l\| \geq \varepsilon$. ］

$\varepsilon := 1 > 0$ とおく．任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる．

$$k := (N+1)^2, \quad l := N^2 \geq N$$

とおく．すると,

$$\|x_k - x_l\| = \sqrt{\left(\sqrt{k} - \sqrt{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{l}}\right)^2} \geq \left|\sqrt{k} - \sqrt{l}\right| = 1 = \varepsilon$$

が成り立つ．以上により, $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことが示された． □

【コメント】

- (1), (2) ともにポイントは

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2} \geq |a_1-b_1|$$

という不等式に気づくかどうかでした. これを用いると, それぞれ「第 1 成分が収束しない (Cauchy 列でない) ことを示せば十分」ということが分かります. (これを一般化したのが **問 34** です. ぜひ解いてみてください.)

- さらに第 1 成分だけに着目すると, $\mathbb{R}$ 内の点列 (つまり数列) の話になりますので, (1) については

実数列が「$+\infty$ に発散する」ならば「収束しない」

という性質が利用できます. 直接「収束しない」ことを証明するのが難しい場合は,「$+\infty$ に発散する」ことの証明を考えてみると解きやすいかもしれません.

- 採点していて, ε や k を定めた際に明らかに $\varepsilon > 0$ や $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$ を満たさないような置き方をしている解答が多かったのは驚きました. 具体的には,

$$\varepsilon := a_1,\ \ \frac{a_1}{2},\ \ |a_1|,\ \ |a_2|,\ \ |1-a_1|,\ \ |a_1-a_2|,\ \ (a_1+a_2)^2$$

$$k := \sqrt{a_1+N},\ \ \sqrt{a_1+1}+N,\ \ \max\{2a_1, N\},$$

$$k := \log_2(|a_1|+2^N),\ \ \log_2(a_1+N),\ \ \log_2(a_1+1)+N,$$

$$k := \max\{(\|a\|+1)^2, N\},\ \ (a_1+1)^2+N,\ \ ([a_1]+N)^2$$

のような置き方です. 特に, 明らかに $\varepsilon > 0$ や $k \geq N$ が成り立たない置き方や, $\sqrt{a_1+N}$ や $\log_2(a_1+N)$ など値が定義されない置き方をした人は十分に注意してください (無条件に × にしていると思います). 何かを定めた際は, 条件を満たしていることを確認し, それを明記する習慣をつけましょう.