数学通論 I 演習：演習問題 (No. 7)・解答

問 7-A $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

【解答】

Heine–Borel の定理から, C が有界閉集合であることを示せばよい.

まず有界性を示す.

［示すこと１：A : 有界, i.e., $\exists R > 0$ s.t. $A \subset U((0,0); R)$. ］
$R := 2 > 0$ とおく.

［**claim**：$A \subset U((0,0); R)$, i.e., $\forall x \in A$, $\|x\| < R$. ］
任意に $x = (x_1, x_2) \in A$ をとる．このとき, $|x_i| \leq |x_1| + |x_2| \leq 1$ より $|x_i| \leq 1$ $(i = 1, 2)$ なので,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 2 = R$$

が成り立つ.

以上より, A は有界である.

次に閉集合であることを示す.

［示すこと２：$\mathbb{R}^2 \setminus A$: 開集合, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. ］

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ をとる．$\varepsilon := \dfrac{|x_1| + |x_2| - 1}{\sqrt{2}} > 0$ とおく.

［**claim**：$U(x; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$, i.e., $\forall y \in U(x; \varepsilon)$, $y \notin A$. ］
任意に $y = (y_1, y_2) \in U(x; \varepsilon)$ をとる．このとき, $|a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
|x_1| - |y_1| + |x_2| - |y_2| &\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\
&\leq \sqrt{2\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)} \\
&= \sqrt{2}\, d(x, y) \\
&< \sqrt{2}\varepsilon = |x_1| + |x_2| - 1
\end{aligned}$$

より, $|y_1| + |y_2| > 1$ となるので, $y \notin A$.
以上より, $\mathbb{R}^2 \setminus A$ は開集合である．よって, A は閉集合である. □

問 7-B $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

【解答】

Heine–Borel の定理から, B が有界閉集合であることを示せばよい.

まず有界性を示す.

［示すこと１：C : 有界, i.e., $\exists R > 0$ s.t. $B \subset U((0,0); R)$. ］
$R := 2 > 0$ とおく.

［**claim**：$B \subset U((0,0); R)$, i.e., $\forall x \in B$, $\|x\| < R$. ］
任意に $x \in B$ をとる. このとき,

$$\|x\| \leq 1 < 2 = R$$

が成り立つ.

以上より, B は有界である.

次に閉集合であることを示す.

［示すこと２：$\mathbb{R}^2 \setminus B$: 開集合, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$. ］

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ をとる. $\varepsilon := \|x\| - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 > 0$ とおく.

［**claim**：$U(x; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$, i.e., $\forall y \in U(x; \varepsilon)$, $y \notin B$. ］
任意に $y = (y_1, y_2) \in U(x; \varepsilon)$ をとる. このとき,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| = d(x, y) < \varepsilon = \|x\| - 1$$

より, $y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2 > 1$ なので, $y \notin B$.
以上より, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ は開集合である. よって, B は閉集合である. □

問 7-C $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\})$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

【解答】

Heine–Borel の定理から, C が有界閉集合であることを示せばよい.

まず有界性を示す.

［示すこと１：C : 有界, i.e., $\exists R > 0$ s.t. $C \subset U((0,0); R)$. ］
$R := 2 > 0$ とおく.

［**claim**：$C \subset U((0,0); R)$, i.e., $\forall x \in C$, $\|x\| < R$. ］
任意に $x = (x_1, x_2) \in C$ をとる. このとき, $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ なので,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} < 2 = R$$

が成り立つ.

以上より, C は有界である.

次に閉集合であることを示す.

[示すこと２：$\mathbb{R}^2 \setminus C$: 開集合, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$.]

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ をとる. このとき C の定義から,

$$x_1 < 0, \quad x_2 < 0, \quad 1 < x_1, \quad 1 < x_2$$

のいずれかが成り立つ.

(i) $x_1 < 0$ のとき. $\varepsilon := -x_1 > 0$ とおく.

[**claim**：$U(x;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, i.e., $\forall y \in U(x;\varepsilon)$, $y \notin C$.]

任意に $y = (y_1, y_2) \in U(x;\varepsilon)$ をとる. このとき,

$$|x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y) < \varepsilon$$

より, $y_1 < x_1 + \varepsilon = 0$. よって $(*)$ より, $y \notin C$.

(ii) $x_2 < 0$ のとき. $\varepsilon := -x_2 > 0$ とおけば, (i) と同様に示せる.

(iii) $x_1 > 1$ のとき. $\varepsilon := x_1 - 1 > 0$ とおく.

[**claim**：$U(x;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, i.e., $\forall y \in U(x;\varepsilon)$, $y \notin C$.]

任意に $y = (y_1, y_2) \in U(x;\varepsilon)$ をとる. このとき,

$$|x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y) < \varepsilon$$

より, $y_1 > x_1 - \varepsilon = 1$. よって $(*)$ より, $y \notin C$.

(iv) $x_2 > 1$ のとき. $\varepsilon := x_2 - 1 > 0$ とおけば, (iii) と同様に示せる.

以上より, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ は開集合である. よって, C は閉集合である. $\square$