数学通論 I 演習：演習問題 (No. 8)・解答

問 8-A d_1, d_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離, マンハッタン距離とする．また, d_i $(i=1,2)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする．次の問いに答えよ．

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ．

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合でもあることを示せ．

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$. ］

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\delta := \varepsilon > 0$ とおく．

［**claim：**$U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$, i.e., $\forall y \in U_2(x;\delta)$, $y \in U_1(x;\varepsilon)$. ］

任意に $y = (y_1, y_2) \in U_2(x;\delta)$ をとる．

［**subclaim：**$y \in U_1(x;\varepsilon)$, i.e., $d_1(x,y) < \varepsilon$. ］

$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に注意すると,

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ．

以上より $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$ が示されたので, よって題意が示された． □

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ を $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合とする．

［示すこと：U : $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合, i.e., $\forall x \in U$, $\delta > 0$ s.t. $U_2(x;\delta) \subset U$. ］

任意に $x \in U$ をとる．U は $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合なので,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U_1(x;\varepsilon) \subset U$$

が成り立つ．この $x \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ に対して, (1) より,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$$

が成り立つ．よって, $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon) \subset U$ なので, $U_2(x;\delta) \subset U$ が示された． □

問 8-B d_2, d_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離, Chebyshev 距離とする. また, d_i $(i=2,3)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする. 次の問いに答えよ.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合でもあることを示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$. ］

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ とおく.

［**claim**：$U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$, i.e., $\forall y \in U_3(x;\delta)$, $y \in U_2(x;\varepsilon)$. ］

任意に $y = (y_1, y_2) \in U_3(x;\delta)$ をとる.

［**subclaim**：$y \in U_2(x;\varepsilon)$, i.e., $d_2(x,y) < \varepsilon$. ］

$a + b \leq 2\max\{a, b\}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に注意すると,

$$d_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq 2\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つ.

以上より $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$ が示されたので, よって題意が示された. □

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ を $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合とする.

［示すこと：U : $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合, i.e., $\forall x \in U$, $\delta > 0$ s.t. $U_3(x;\delta) \subset U$. ］

任意に $x \in U$ をとる. U は $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合なので,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U_2(x;\varepsilon) \subset U$$

が成り立つ. この $x \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ に対して, (1) より,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$$

が成り立つ. よって, $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon) \subset U$ なので, $U_3(x;\delta) \subset U$ が示された. □

問 8-C d_3, d_1 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離, 標準的な距離とする. また, d_i $(i=3,1)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする. 次の問いに答えよ.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合でもあることを示せ.

【解答】

(1) ［示すこと：$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$. ］

任意に $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ をとる. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\delta := \varepsilon > 0$ とおく.

［**claim**：$U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$, i.e., $\forall y \in U_1(x;\delta)$, $y \in U_3(x;\varepsilon)$. ］

任意に $y = (y_1, y_2) \in U_1(x;\delta)$ をとる.

［**subclaim**：$y \in U_3(x;\varepsilon)$, i.e., $d_3(x,y) < \varepsilon$. ］

$\max\{a,b\} \leq \sqrt{a^2+b^2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に注意すると,

$$d_3(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ.

以上より $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$ が示されたので, よって題意が示された. □

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ を $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合とする.

［示すこと：U : $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合, i.e., $\forall x \in U$, $\delta > 0$ s.t. $U_1(x;\delta) \subset U$. ］

任意に $x \in U$ をとる. U は $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合なので,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U_3(x;\varepsilon) \subset U$$

が成り立つ. この $x \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ に対して, (1) より,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$$

が成り立つ. よって, $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon) \subset U$ なので, $U_1(x;\delta) \subset U$ が示された. □