数学通論 I 演習：演習問題 (No. 9)・解答

※　今回の課題は答案の書き方がいろいろありましたので, 問題 A, B, C で解答の書き方を少し変えてみます.

※　以下, d_1, d に関する ε-近傍をそれぞれ $U(x;\varepsilon)$, $U_d(x;\varepsilon)$ のように表すことにします.

問 9-A　写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を　$f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定める.

(1) $f:(\mathbb{R},d_1)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists U$: $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合 s.t. $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合でない. ］

$U := (-\frac{1}{2},\infty)\subset\mathbb{R}$ とおく. U は開区間なので, $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合.

［**claim**：$f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合でない,
i.e., $\exists x\in f^{-1}(U)$ s.t. $\forall\varepsilon>0$, $U(x;\varepsilon)\not\subset f^{-1}(U)$. ］

$x:=0\in\mathbb{R}$ とおく. すると, $f(x)=0\in U$ より, $x\in f^{-1}(U)$.

任意に $\varepsilon>0$ をとる.

［**claim**：$U(x;\varepsilon)\not\subset f^{-1}(U)$, i.e., $\exists y\in U(x;\varepsilon)$ s.t. $y\notin f^{-1}(U)$. ］

$y:=\min\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{4}\}>0$ とおく. すると,

- $|x-y|=y\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ より, $y\in U(x;\varepsilon)$.
- $0<y\leq\frac{1}{4}$ なので, f の定義から $-1<f(y)\leq-\frac{1}{2}$. よって, $f(y)\notin U$ より, $y\in f^{-1}(U)$.

以上より $f^{-1}(U)$ が $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合でないことが示されたので, $f:(\mathbb{R},d_1)\to(\mathbb{R},d_1)$ は連続でない. □

(2) ［示すこと：$\forall U$: $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合, $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R},d)$ の開集合. ］

任意に $(\mathbb{R},d_1)$ の開集合 U をとる.

［**claim**：$f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R},d)$ の開集合,
i.e., $\forall x\in f^{-1}(U)$, $\exists\varepsilon>0$ s.t. $U_d(x;\varepsilon)\subset f^{-1}(U)$. ］

任意に $x \in f^{-1}(U)$ をとる. $\varepsilon := 1$ とおく.

［**claim :** $U(x;\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$, i.e., $\forall y \in U(x;\varepsilon)$, $y \in f^{-1}(U)$. ］

任意に $y \in U(x;\varepsilon)$ をとる. このとき $|x-y| < 1$ なので, 離散距離の定義から $x = y$. よって, $y = x \in f^{-1}(U)$ が成り立つ.

以上より $f^{-1}(U)$ が $(\mathbb{R}, d)$ の開集合であることが示されたので, $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ は連続である. □

問 9-B 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

【解答】

(1) ［示すこと : $\exists U$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合 s.t. $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合でない. ］

$U := (\frac{1}{2}, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく. U は開区間なので, $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合.

［**claim :** $f^{-1}(U) = (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{6}, \infty)$. ］

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in U \\ &\Leftrightarrow \quad (x \leq 0 \wedge f(x) \in U) \ \vee \ (x > 0 \wedge f(x) \in U) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \leq 0 \wedge -x+1 > \frac{1}{2}) \ \vee \ (x > 0 \wedge 3x > \frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \ \vee \ \frac{1}{6} < x \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{6}, \infty) \end{aligned}$$

なので, 成り立つ.

$f^{-1}(U) = (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{6}, \infty)$ は明らかに $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合でない. よって, f : $(\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ は連続でない. □

(2) ［示すこと：$\forall U$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合, $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R}, d)$ の開集合. ］

任意に $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合 U をとる.

［**claim :** $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R}, d)$ の開集合,
i.e., $\forall x \in f^{-1}(U), \exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_d(x; \varepsilon) \subset f^{-1}(U)$. ］

任意に $x \in f^{-1}(U)$ をとる. $\varepsilon := 1$ とおく. すると, $(\mathbb{R}, d)$ は離散距離空間なので,

$$U_d(x; \varepsilon) = \{x\} \subset f^{-1}(U)$$

が成り立つ.

以上より $f^{-1}(U)$ が $(\mathbb{R}, d)$ の開集合であることが示されたので, $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ は連続である. □

問 9-C 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

【解答】

(1) ［示すこと：$\exists U$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合 s.t. $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合でない. ］

$U := (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ とおく. U は開区間なので, $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合.

ここで, $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(U)$ を求める.

［**claim :** $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(U) = (0, 1]$. ］

$\mathbb{R} \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) = f^{-1}([0, \infty))$ に注意する. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([0,\infty)) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in [0, \infty) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \leq 0 \wedge f(x) \geq 0) \ \vee \ (x > 0 \wedge f(x) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \leq 0 \wedge 2x - 1 \geq 0) \ \vee \ (x > 0 \wedge -x + 1 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (0, 1] \end{aligned}$$

なので, 成り立つ.

$\mathbb{R} \setminus f^{-1}(U) = (0, 1]$ は明らかに $(\mathbb{R}, d_1)$ の閉集合でないので, その補集合である $f^{-1}(U)$ は $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合でない. よって, $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ は連続でない. □

(2) ［示すこと：$\forall U$: $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合, $f^{-1}(U)$: $(\mathbb{R}, d)$ の開集合. ］

任意に $(\mathbb{R}, d_1)$ の開集合 U をとる.

$(\mathbb{R}, d)$ は離散距離空間なので, 部分集合 $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ は開集合.

よって, $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ は連続である. $\square$