数学通論 I 演習：演習問題 (No. 10)・解答

※　今回の課題は答案の書き方がいろいろありましたので, 問題 A, B, C で解答の書き方を少し変えてみます.

※　問題 10-B, C でそれぞれ B, C とすべき箇所が A になっていました. お詫びして訂正します.

問 10-A　d_1, d_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離, マンハッタン距離とする. $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_1(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) A の d_2 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) A が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

【解答】

(1) $r \in (0, \sqrt{2})$ に対して, $U_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x; (0,0)) < r\}$ とおく. $\{U_r\}_{r \in (0,\sqrt{2})}$ が A の d_2 に関する開被覆であることを示す.

［示すこと 1：$\forall r \in (0, \sqrt{2})$, U_r：$(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合. ］

任意に $r \in (0, \sqrt{2})$ をとる. U_r は d_2 に関する ε-近傍なので, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合である.

［示すこと 2：$A \subset \displaystyle\bigcup_{r \in (0,\sqrt{2})} U_r$, i.e., $\forall a \in A$, $a \in \displaystyle\bigcup_{r \in (0,\sqrt{2})} U_r$. ］

任意に $a = (a_1, a_2) \in A$ をとる.

［**claim**：$a \in \displaystyle\bigcup_{r \in (0,\sqrt{2})} U_r$, i.e., $\exists r \in (0, \sqrt{2})$ s.t. $a \in U_r$. ］

$r := \dfrac{d_2(a, (0,0)) + \sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}$ とおく. $a \in A$ は

$$0 \le d_2(a, (0,0)) = |a_1| + |2| \le \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2)} < \sqrt{2}$$

を満たすので, $r \in (0, \sqrt{2})$ が成り立つ.

［**claim**：$a \in U_r$, i.e., $d_2(a, (0,0)) < r$. ］

$d_2(a, (0,0)) < \sqrt{2}$ なので,

$$d_2(a, (0,0)) < \frac{d_2(a, (0,0)) + \sqrt{2}}{2} = r$$

が成り立つ.

以上より, $\{U_r\}_{r \in (0,\sqrt{2})}$ は A の d_2 に関する開被覆である. □

(2) A が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを示す.

[示すこと：$\exists\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：$A$ の開被覆 s.t. $\forall\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\Lambda,\ A\not\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{\lambda_i}$.]

$U_r := \{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_2(x;(0,0))<r\}$ $(r\in(0,\sqrt{2}))$ とおく. (1) より, $\{U_r\}_{r\in(0,\sqrt{2})}$ は A の d_2 に関する開被覆である. 任意に $r_1,\ldots,r_k\in(0,\sqrt{2})$ をとる.

[**claim**：$A\not\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{r_i}$, i.e., $\exists a\in A$ s.t. $a\notin\bigcup_{i=1}^{k}U_{r_i}$.]

$r:=\max\{r_1,\ldots,r_k\}\in(0,\sqrt{2})$ とおき, $a:=(\frac{r}{2},\frac{r}{2})\in\mathbb{R}^2$ とおく. すると,

$$d_1(a;(0,0))=\sqrt{\left(\frac{r}{2}-0\right)^2+\left(\frac{r}{2}-0\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{2}}<1$$

なので, $a\in A$.

[**claim**：$a\notin\bigcup_{i=1}^{k}U_{r_i}$, i.e., $\forall i\in\{1,\ldots,k\},\ a\notin U_{r_i}$.]

任意に $i\in\{1,\ldots,k\}$ をとる. このとき,

$$d_2(a,(0,0))=\left|\frac{r}{2}-0\right|+\left|\frac{r}{2}-0\right|=r\geq r_i$$

なので, $a\notin U_{r_i}$.

以上より, A が $(\mathbb{R}^2,d_2)$ のコンパクト集合でないことが示された. $\square$

問 10-B d_2, d_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離, Chebyshev 距離とする. $B:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_2(x,(0,0))<1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) B の d_3 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) B が $(\mathbb{R}^2,d_3)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

【解答】

(1) $r\in(0,1)$ に対して, $U_r:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_2(x;(0,0))<r\}$ とおく. $\{U_r\}_{r\in(0,1)}$ が B の d_3 に関する開被覆であることを示す.

[示すこと 1：$\forall r\in(0,1)$, U_r：$(\mathbb{R}^2,d_3)$ の開集合.]

任意に $r\in(0,1)$ をとる. U_r は d_2 に関する ε-近傍なので, $(\mathbb{R}^2,d_2)$ の開集合である. 問題 8-B の結果から, 「$(\mathbb{R}^2,d_2)$ の開集合は $(\mathbb{R}^2,d_3)$ の開集合」なので, U_r は $(\mathbb{R}^2,d_3)$ の開集合である.

［示すこと２：$B \subset \bigcup_{r \in (0,1)} U_r$, i.e., $\forall b \in B,\ b \in \bigcup_{r \in (0,1)} U_r$. ］

任意に $b \in B$ をとる.

［**claim**：$b \in \bigcup_{r \in (0,1)} U_r$, i.e., $\exists r \in (0,1)$ s.t. $b \in U_r$. ］

$r := \dfrac{d_2(b,(0,0))+1}{2} \in \mathbb{R}$ とおく. $b \in B$ は $0 \leq d_2(b,(0,0)) < 1$ を満たすので, $r \in (0,1)$ が成り立つ.

［**claim**：$b \in U_r$, i.e., $d_2(b,(0,0)) < r$. ］

$d_2(b,(0,0)) < 1$ なので,

$$d_2(b,(0,0)) < \frac{d_2(b,(0,0))+1}{2} = r$$

が成り立つ.

以上より, $\{U_r\}_{r \in (0,1)}$ は B の d_3 に関する開被覆である. □

(2) B が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを示す.

［示すこと：$\exists \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: B の開被覆 s.t. $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda,\ B \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$. ］

$U_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x;(0,0)) < r\}$ $(r \in (0,1))$ とおく. (1) より, $\{U_r\}_{r \in (0,1)}$ は B の d_3 に関する開被覆である. 任意に $r_1, \ldots, r_k \in (0,1)$ をとる.

［**claim**：$B \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\exists b \in B$ s.t. $b \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$. ］

$r := \max\{r_1, \ldots, r_k\} \in (0,1)$ とおき, $b := (r,0) \in \mathbb{R}^2$ とおく. すると,

$$d_2(b;(0,0)) = |r-0| + |0-0| = r < 1$$

なので, $b \in B$.

［**claim**：$b \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ b \notin U_{r_i}$. ］

任意に $i \in \{1, \ldots, k\}$ をとる. このとき,

$$d_2(b,(0,0)) = r \geq r_i$$

なので, $b \notin U_{r_i}$.

以上より, B が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ のコンパクト集合でないことが示された. □

問 10-C d_3, d_1 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離, 標準的な距離とする. $C := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_3(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) C の d_1 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) C が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

※　以下, d_1 に関する ε-近傍を $U_1(x;\varepsilon)$ のように表すことにします.

【解答】

(1) $r \in (-1,1)$ に対して, $U_r := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < r\}$ とおく. $\{U_r\}_{r\in(-1,1)}$ が C の d_1 に関する開被覆であることを示す.

[示すこと 1 : $\forall r \in (-1,1)$, U_r : $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合.]

任意に $r \in (-1,1)$ をとる.

[**claim** : U_r : $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合, i.e., $\forall x \in U_r, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_1(x;\varepsilon) \subset U_r$.]

任意に $x = (x_1, x_2) \in U_r$ をとる. $x_1 < r$ なので, $\varepsilon := r - x_1 > 0$ とおく.

[**claim** : $U_1(x;\varepsilon) \subset U_r$, i.e., $\forall y \in U_1(x;\varepsilon)$, $y \in U_r$.]

任意に $y \in U_1(x;\varepsilon)$ をとる. このとき,

$$y_1 - x_1 \leq |x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \varepsilon = r - x_1$$

なので, $y_1 < r$. よって, $y \in U_r$.

以上より, 各 U_r は開集合である.

[示すこと 2 : $C \subset \bigcup_{r\in(-1,1)} U_r$, i.e., $\forall c \in C$, $c \in \bigcup_{r\in(-1,1)} U_r$.]

任意に $c = (c_1, c_2) \in C$ をとる.

[**claim** : $c \in \bigcup_{r\in(-1,1)} U_r$, i.e., $\exists r \in (-1,1)$ s.t. $c \in U_r$.]

$r := \dfrac{c_1 + 1}{2} \in \mathbb{R}$ とおく. $c \in C$ は $\max\{|c_1|, |c_2|\} < 1$ より $-1 < c_1 < 1$ を満たすので, $r \in (-1,1)$ が成り立つ.

[**claim** : $c \in U_r$, i.e., $c_1 < r$.]

$c_1 < 1$ なので,

$$c_1 < \frac{c_1 + 1}{2} = r$$

が成り立つ.

以上より, $\{U_r\}_{r\in(-1,1)}$ は C の d_1 に関する開被覆である. □

(2) C が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを示す.

［示すこと：$\exists\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: C の開被覆 s.t. $\forall\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$, $C \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$. ］

$U_r := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < r\}$ $(r \in (-1, 1))$ とおく. (1) より, $\{U_r\}_{r\in(-1,1)}$ は C の d_1 に関する開被覆である. 任意に $r_1, \ldots, r_k \in (-1, 1)$ をとる.

［**claim**：$C \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\exists c \in C$ s.t. $c \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$. ］

$r := \max\{r_1, \ldots, r_k\} \in (-1, 1)$ とおき, $c := (r, 0) \in \mathbb{R}^2$ とおく. すると,

$$d_3(c; (0, 0)) = \max\{|r - 0|, |0 - 0|\} = |r| < 1$$

なので, $c \in C$.

［**claim**：$c \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_{r_i}$, i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $c \notin U_{r_i}$. ］

任意に $i \in \{1, \ldots, k\}$ をとる. このとき,

$$「c \text{ の第 1 成分」} = r \geq r_i$$

なので, $c \notin U_{r_i}$.

以上より, C が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ のコンパクト集合でないことが示された. □