数学通論 I 演習：演習問題 (No. 11)・解答

※　以下, 部分距離空間 (A, d_A) の ε-近傍を $U_A(a;\varepsilon)$ のように表すことにします. 具体的には $U_A(a;\varepsilon) = \{x \in A \mid d_A(a,x) < \varepsilon\}$ です.

問 11-A　$A := (0,3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(1,3]$ が (A, d_A) の開集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の Cauchy 列であることを定義に従って示せ.

【解答】

(1) $(1,3]$ が (A, d_A) の開集合であることを示す.

［示すこと：$\forall x \in (1,3]$, $\varepsilon > 0$ s.t. $U_A(x;\varepsilon) \subset (1,3]$. ］

任意に $x \in (1,3]$ をとる. $\varepsilon := x - 1 > 0$ とおく.

［**claim**：$U_A(x;\varepsilon) \subset (1,3]$, i.e., $\forall y \in U_A(x;\varepsilon)$, $y \in (1,3]$. ］

任意に $y \in U_A(x;\varepsilon)$ をとる. このとき,

- $y \in A$ なので, $0 < y \leq 3$.
- $x - y \leq |x - y| < \varepsilon = x - 1$ なので, $y > 1$,

なので, $y \in (1,3]$ が成り立つ.

以上より, $(1,3]$ は (A, d_A) の開集合である. □

(2) $x_k := \dfrac{2}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ とおく. $\{x_k\}$ が (A, d_A) の Cauchy 列であることを示す.

［示すこと：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall k, l \geq N$, $d_A(x_k, x_l) < \varepsilon$. ］

任意に $\varepsilon > 0$ をとる. アルキメデスの原理より,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \frac{4}{\varepsilon} < N$$

が成り立つ. 任意に $k, l \in \mathbb{N}$ をとり, $k, l \geq N$ とする. このとき,

$$d_A(x_k, x_l) = |x_k - x_l| = \left|\frac{2}{k} - \frac{2}{l}\right| \leq \frac{2}{k} + \frac{2}{l} \leq \frac{2}{N} + \frac{2}{N} = \frac{4}{N} < \varepsilon$$

が成り立つ.

以上より, $\{x_k\}$ が (A, d_A) の Cauchy 列であることが示された. □

問 11-B $A := (0,3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(0,2]$ が (A, d_A) の閉集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の収束列でないことを定義に従って示せ.

【解答】

(1) $(0,2]$ が (A, d_A) の閉集合であることを示す. そのために, 補集合 $A \setminus (0,2] = (2,3]$ が開集合であることを示す.

[示すこと：$\forall x \in (2,3], \varepsilon > 0$ s.t. $U_A(x;\varepsilon) \subset (2,3]$.]

任意に $x \in (1,2]$ をとる. $\varepsilon := x - 2 > 0$ とおく.

[**claim**：$U_A(x;\varepsilon) \subset (2,3]$, i.e., $\forall y \in U_A(x;\varepsilon)$, $y \in (2,3]$.]

任意に $y \in U_A(x;\varepsilon)$ をとる. このとき,

- $y \in A$ なので, $0 < y \leq 3$.
- $x - y \leq |x - y| < \varepsilon = x - 2$ なので, $y > 2$,

なので, $y \in (2,3]$ が成り立つ.

以上より, $(0,1]$ は (A, d_A) の閉集合である. □

(2) $x_k := \dfrac{2}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ とおく. $\{x_k\}$ が (A, d_A) の収束列でないことを示す.

[示すこと：$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N$ s.t. $d_A(x_k, a) \geq \varepsilon$.]

任意に $a \in A$ をとる. $a > 0$ より, $\varepsilon := \dfrac{a}{2} > 0$ とおく. 任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる. このとき, アルキメデスの原理より,

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \max\{N, \frac{4}{a}\} < k$$

が成り立つ. これは $k \geq N$ を満たす. 更に, $\dfrac{2}{k} < \dfrac{a}{2} < a$ なので,

$$d_A(x_k, a) = |x_k - a| = a - \frac{2}{k} > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ.

以上より, $\{x_k\}$ が (A, d_A) の収束列でないことが示された. □