

配布したプリントは <https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html> にも置いてあります.

提出課題 (No. 2)

次の **A** ~ **C** の問題から指定された 1 問を解き、レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 3, 6, 9 は **A**」「1, 4, 7 は **B**」「2, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 2 日 14:35

問 2-A. $A := (-1, 2] \subset \mathbb{R}$ とおく.

- (1) 点 0 が A の内点であることを定義に従って示せ.
- (2) 点 2 が A の内点でないことを定義に従って示せ.

問 2-B. $B := [3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

- (1) 点 4 が B の内点であることを定義に従って示せ.
- (2) 点 3 が B の内点でないことを定義に従って示せ.

問 2-C. $C := (-1, 2] \cup [3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

- (1) 点 0 が C の内点であることを定義に従って示せ.
- (2) 点 3 が C の内点でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- $\varepsilon > 0$ に対して, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の「 ε -近傍 $U(a; \varepsilon)$ 」の定義を述べよ.
- 点 $a \in \mathbb{R}^n$ が A の「内点である」ことの定義を述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の「内部 A° 」の定義やその言い換えを述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が「開集合である」ことの定義やその同値な条件を述べよ.

問 2. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A^\circ \subset A$ が成り立つことを示せ.

問 3. $A := [-1, 1] (= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\})$ とおく.

- (1) 点 0 が A の内点であることを示せ.
- (2) 点 1 が A の内点でないことを示せ.
- (3) $A^\circ = (-1, 1)$ であることを示せ.

問 4. $A := [-1, 1] \times [-1, 1]$ ($= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$) とおく.

- (1) 点 $(0, 0)$ が A の内点であることを示せ.
- (2) 点 $(1, 1)$ が A の内点でないことを示せ.
- (3) $A^\circ = (-1, 1) \times (-1, 1)$ であることを示せ.

問 5. 次の \mathbb{R} の部分集合 A について, その内部を求めよ. (注)

- | | |
|---|---|
| (1) $A = (1, 2)$ | (2) $A = [0, 1) \cup (2, 3]$ |
| (3) $A = [1, \infty)$ | (4) $A = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ |
| (5) $A = \{0\}$ | (6) $A = \mathbb{Z}$ |
| (7) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ | (8) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$ |

問 6. 次の \mathbb{R}^2 の部分集合 A について, その内部を求めよ.

- | | |
|--|--|
| (1) $A = (0, 1) \times (2, 3)$ | (2) $A = [0, 1] \times [2, 3]$ |
| (3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ | (4) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ |
| (5) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x - 1\}$ | (6) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ |

問 7. $n \in \mathbb{N}$ とする. \emptyset, \mathbb{R}^n が \mathbb{R}^n の開集合であることを定義に従って示せ.

問 8. $a < b$ とする. 次の \mathbb{R} の部分集合 A の内部を求め, 開集合かどうか調べよ. (ヒント)

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| (1) $A = (a, b)$ | (2) $A = (a, \infty)$ | (3) $A = (-\infty, b)$ |
| (4) $A = [a, b)$ | (5) $A = (a, b]$ | (6) $A = [a, b]$ |
| (7) $A = [a, \infty)$ | (8) $A = (-\infty, b]$ | (9) $A = \{a\}$ |

問 9. 次の \mathbb{R}^2 の部分集合 A が \mathbb{R}^2 の開集合であるか調べよ.

- | | |
|--|---|
| (1) $A = (0, 1) \times (2, 3)$ | (2) $A = [0, 1] \times [2, 3]$ |
| (3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ | (4) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ |
| (5) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2\}$ | (6) $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2\}$ |
| (7) $\{(0, 0)\}$ | (8) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ |

(注) 正確に言えば, 「その内部が何かになるか予想し, それを示せ」です. 以下, 「 \dots を求めよ」や「 \dots を調べよ」と書かれた問題も同様に解釈してください.

(ヒント) 定義に従って示す際に, 開集合であることを示すには実質的にその内部を求める必要がありますが, 開集合でないことを示すのであれば内部を求める必要はありません (なぜでしょうか?).