数学通論 I 演習：演習問題 (No. 3)　　(2020/05/08)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 3)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 5 は **A**」「7, 9, 2 は **B**」「4, 6, 8, 0 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 9 日　14:35

問 3-A. $A := [-1, 2) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 2 が A の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が A の触点でないことを定義に従って示せ.

問 3-B. $B := (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が B の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < 3$ とする. 点 x が B の触点でないことを定義に従って示せ.

問 3-C. $C := [-1, 2) \cup (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が C の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が C の触点でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- 点 $a \in \mathbb{R}^n$ が A の「触点である」ことの定義を述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の「閉包 $\overline{A}$」の定義やその言い換えを述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が「閉集合である」ことの定義やその同値な条件を述べよ.

確認問題. $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して「A が開集合かどうか」と「A が閉集合かどうか」は互いに無関係である. 実際に, $A \subset \mathbb{R}$ で次の条件を満たすものの例をそれぞれ挙げよ.

- 開集合であるが, 閉集合でない.
- 閉集合であるが, 開集合でない.
- 開集合でも閉集合でもない.
- 開集合でも閉集合でもある.

問 10. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A \subset \overline{A}$ が成り立つことを示せ.

問 11. $A := (0,1) \cup [2,\infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 0 が A の触点であることを示せ.

(2) 点 -1 が A の触点でないことを示せ.

(3) $\overline{A} \supset [0,1] \cup [2,\infty)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\overline{A} \subset [0,1] \cup [2,\infty)$ が成り立つことを, 対偶を考えることで示せ.

問 12. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A について, その閉包を求めよ.

(1) $A = (1,2)$

(2) $A = [0,1) \cup (2,3]$

(3) $A = [1,\infty)$

(4) $A = (-\infty,0) \cup [1,\infty)$

(5) $A = \{0\}$

(6) $A = \mathbb{Z}$

(7) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(8) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1)$

問 13. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A について, その閉包を求めよ.

(1) $A = (0,1) \times (2,3)$

(2) $A = [0,1] \times [2,3]$

(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x - 1\}$

(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

問 14. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを定義に従って示せ.

問 15. 問 8 で挙げた各部分集合が $\mathbb{R}$ の閉集合かどうか調べよ.

問 16. 問 9 で挙げた各部分集合が $\mathbb{R}^2$ の閉集合かどうか調べよ.

問 17. 次の問いに答えよ (開集合の「無限」族の共通部分は開集合であるとは限らない, また閉集合の「無限」族の和集合は閉集合であるとは限らないことに注意せよ).

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $A_n := (0, 1+\frac{1}{n})$ で定めるとき, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ.

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $B_n := [0, 2-\frac{1}{n}]$ で定めるとき, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ を求めよ.