数学通論 I 演習：演習問題 (No. 4)

(2020/05/13)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります.

提出課題 (No. 4)

次の **A** 〜 **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 6, 7 は **A**」「0, 3, 9 は **B**」「1, 4, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 14 日　8:45

問 4-A. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

問 4-B. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x>0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

問 4-C. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $a\in\mathbb{R}^n$ とする.
- 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が 「点 a で連続である」ことの定義を述べよ.
- 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が 「連続である」ことの定義や同値条件を述べよ.

確認問題. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := x^2$ で定める. 次の問いに答えよ. (「開集合の連続写像による "逆像" は開集合となる」が, 「開集合の連続写像による "像" は開集合とは限らない」ことに注意せよ.)
- $A := (-1,2)$ の f による像 $f(A)$ を求めよ.
- $B := (-1,4)$ の f による逆像 $f^{-1}(B)$ を求めよ.

以下, 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が連続であることの定義を

条件 A： $\forall a\in\mathbb{R}^n, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } f(U(a;\delta))\subset U(f(a);\varepsilon)$ (定義 5.3)

条件 B： $\forall U\subset\mathbb{R}^m$: 開集合, $f^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^n$: 開集合 (定理 5.5)

とする (この 2 つの条件が同値であることは授業でやった).

問 18. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\begin{cases}0 & (x\neq 0 \text{ のとき})\\ 1 & (x=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

で定める.

(1) f が連続でないことを **条件 A** を用いて示せ.

(2) f が連続でないことを **条件 B** を用いて示せ.

問 19. 次の写像が連続であることを示せ.

(1) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n : x\mapsto x$. (このような写像を **恒等写像** という.)

(2) $a\in\mathbb{R}^m$ に対して, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m : x\mapsto a$. (このような写像を **定値写像** という.)

(3) $i\in\{1,\dots n\}$ に対して, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} : (x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$. (このような写像を **射影** という.)

(4) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} : x\mapsto \|x\|$.

問 20. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ を連続写像とし, $h:=g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ とおく.

(1) h が連続であることを **条件 A** を用いて示せ.

(2) h が連続であることを **条件 B** を用いて示せ.

問 21. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を写像とし, 各 $i\in\{1,\dots m\}$ に対して, 写像 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x)) \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$$

で定める.

(1) f が連続ならば, f_i はすべて連続であることを示せ.

(2) 逆に, f_i がすべて連続ならば, f は連続であることを示せ.

問 22. A を実 $m\times n$ 行列とし, 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $f(x):=Ax$ で定める. ここで, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の元をそれぞれ n 次, m 次の縦ベクトルとみなし, Ax は行列の積であるとする. このとき, f は連続写像であることを示せ.