# 数学通論 I 演習：演習問題 (No. 5)

(2020/05/15)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります.

**提出課題 (No. 5)**

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

**指定問題：** 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 7 は **A**」「0, 2, 4, 5 は **B**」「6, 8, 9 は **C**」

**提出期限：** 2020 年 5 月 16 日　14:35

**問 5-A.** $A := (0, 2) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $U_n := (0, 2 - \dfrac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $A$ の開被覆であることを示せ. ただし, $\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) $A$ がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

**問 5-B.** $B := [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $r > 0$ に対して, $U_r := (0, r) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_r\}_{r>0}$ が $B$ の開被覆であることを示せ. ただし, $\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) $B$ がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

**問 5-C.** $C := (-2, 1] \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda \in (0, 2)$ に対して, $U_\lambda := (-\lambda, \lambda) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in (0,2)}$ が $C$ の開被覆であることを示せ. ただし, 開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) $C$ がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

以下は自習用問題です

**確認問題.** $A$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする.

- $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A$ を「被覆する」ことの定義を述べよ.
- $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A$ の「開被覆」であることの定義を述べよ.
- $A$ が「コンパクト」であることの定義を述べよ.
- $A$ が「有界」であることの定義を述べよ.

**問 23.** $A := (0,3) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次で定める $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $A$ の開被覆であることを示せ. また, $\{U_\lambda\}$ を用いて「$A$ がコンパクト集合でないこと」を示せるかどうか調べよ.

(1) $U_\lambda := U(1;\lambda) \quad (\lambda \in \{1,2\})$

(2) $U_\lambda := U(\lambda;1) \quad (\lambda \in \{1,2\})$

(3) $U_\lambda := U(1;\lambda) \quad (\lambda \in (1,2))$

(4) $U_\lambda := U(\lambda;1) \quad (\lambda \in (1,2))$

(5) $U_\lambda := (\frac{1}{\lambda},3) \quad (\lambda \in \mathbb{N})$

(6) $U_\lambda := (0,3+\frac{1}{\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbb{N})$

**問 24.** 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, $a < b$ とする.

(1) $A = \mathbb{R}$

(2) $A = (a,b)$

(3) $A = (a,b]$

(4) $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$

**問 25.** 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A$ がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ.

(1) $A = \mathbb{R}^2$

(2) $A = U((0,0);1)$

(3) $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$

(4) $A = U((0,0);1) \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$

**問 26.** $A, B \subset \mathbb{R}$ をコンパクト集合とする.

(1) $A \cup B$ はコンパクトであることを示せ.

(2) $A \cap B$ はコンパクトであることを示せ.

(3) $A \times B := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A,\ b \in B\}$ はコンパクトであることを示せ.

**問 27.** $A \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合とする. このとき, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) $A$ は有界である.

(ii) $\forall a \in A, \exists R > 0$ s.t. $A \subset U(a;R)$.

**問 28.** $A, B$ を $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合とする.

(1) 和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$ も有界であることを示せ.

(2) 内部 $A^\circ$, 閉包 $\overline{A}$ も有界であることを示せ.