数学通論 I 演習：演習問題 (No. 6) (2020/05/16)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 6)

次の **A** 〜 **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 1, 5, 8 は **A**」「2, 6, 7 は **B**」「3, 4, 9 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 17 日　14:35

問 6-A. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (k^2, \dfrac{1}{k^3})\ \ (k = 1, 2, \ldots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

問 6-B. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (2^k, \dfrac{1}{3^k})\ \ (k = 1, 2, \ldots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

問 6-C. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (\sqrt{k}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}})\ \ (k = 1, 2, \ldots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする.

- $\{x_k\}$ が点 $a \in \mathbb{R}^n$ に「収束する」ことの定義を述べよ.
- $\{x_k\}$ が「収束列」であることの定義を述べよ.
- $\{x_k\}$ が「Cauchy 列」であることの定義を述べよ.
- $\mathbb{R}^n$ の「完備性」を説明せよ.

問 29. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $a, b \in \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ ならば, $a = b$ であることを示せ.

(2) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ならば, $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|a\|$ であることを示せ.

(3) 次の 2 条件が同値であることを示せ.

- (i) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.
- (ii) $\forall U \subset \mathbb{R}^n$: a を含む開集合, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \Rightarrow x_k \in U$.

問 30. $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} y_k = b$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$.

(2) $\lim_{k\to\infty} (\lambda x_k) = \lambda a$.

問 31. 開区間 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ が閉集合でないことを, 命題 7.3 を用いて示せ.

問 32. A を $\mathbb{R}^n$ の (空でない) 部分集合とする. 点 $x \in X$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) x は A の触点である.

(ii) x に収束するような A 内の点列 $\{x_k\}$ が存在する.

問 33. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続関数とする. このとき, $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{f(x_k)\}$ も収束列であることを示せ.

問 34. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, $\mathbb{R}$ の点列 $\{x_i^{(k)}\}$ を

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

で定める.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば, $\{x_i^{(k)}\}$ はすべて収束列であることを示せ.

(2) 逆に, $\{x_i^{(k)}\}$ がすべて収束列ならば, $\{x_k\}$ は収束列であることを示せ.

問 35. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする. このとき, $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は Cauchy 列であることを示せ.

以下, 点列 $\{x_k\}$ が **有界**であるとは, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ が有界であることとする.

問 36. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は有界であることを示せ.

(2) $\{x_k\}$ が Cauchy 列ならば $\{x_k\}$ は有界であることを示せ.