数学通論 I 演習：演習問題 (No. 7) (2020/05/20)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 7)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 2, 9 は **A**」「3, 5, 8 は **B**」「1, 4, 6, 7 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 21 日　8:45

問 7-A. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

問 7-B. $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

問 7-C. $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\})$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. Heine–Borel の定理の主張 (すなわち, Euclid 空間におけるコンパクト性の同値条件) を述べよ.

以下は発展問題です

問 37. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_k\}$ と点 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) $\{x_n\}$ の部分列で, a に収束するものが存在する.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in U(a; \varepsilon)\}$ が無限集合である.

上の条件を満たすとき, $a \in \mathbb{R}^n$ は点列 $\{x_k\}$ の **密集点** (集積点) であるという.

問 38. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) A はコンパクトである.

(ii) A 内の任意の点列は A 内に密集点を持つ.

上の条件 (ii) を満たすとき, 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ は **点列コンパクト** であるという.