# 数学通論 I 演習：演習問題 (No. 8) (2020/05/27)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります．

**提出課題 (No. 8)**

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き，レポートとして提出すること．

**指定問題：** 学籍番号下 1 桁が「2, 5, 9 は **A**」「0, 3, 4, 7 は **B**」「1, 6, 8 は **C**」

**提出期限：** 2020 年 5 月 28 日　10:15

**問 8-A.** $d_1$, $d_2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離，マンハッタン距離とする．また，$d_i$ $(i=1,2)$ に関する $\varepsilon$-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする．次の問いに答えよ．

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ．

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合でもあることを示せ．

**問 8-B.** $d_2$, $d_3$ をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離，Chebyshev 距離とする．また，$d_i$ $(i=2,3)$ に関する $\varepsilon$-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする．次の問いに答えよ．

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ．

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合でもあることを示せ．

**問 8-C.** $d_3$, $d_1$ をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離，標準的な距離とする．また，$d_i$ $(i=3,1)$ に関する $\varepsilon$-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする．次の問いに答えよ．

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ．

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合でもあることを示せ．

以下は自習用問題です

**確認問題.** $X$ を集合，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする．このとき，$(X,d)$ が「距離空間」である，すなわち，$d$ が $X$ 上の「距離 (距離関数)」であることの定義を述べよ．

**確認問題.** $(X,d)$ を距離空間とし，$x \in X$, $A \subset X$ とする．

- 点 $x \in X$ の「$\varepsilon$-近傍 $U(x;\varepsilon)$」の定義を述べよ．
- 点 $x \in X$ が $A$ の「内点」であることの定義を述べよ．
- $A$ の「内部 $A^\circ$」の定義やその言い換えを述べよ．
- $A$ が「開集合」であることの定義の同値条件を述べよ．
- 点 $x \in X$ が $A$ の「触点」であることの定義を述べよ．
- $A$ の「閉包 $\overline{A}$」の定義やその言い換えを述べよ．
- $A$ が「閉集合」であることの定義の同値条件を述べよ．

**問 39.** $d_4 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$d_4(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & (\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x = ty) \\ \|x\| + \|y\| & (\text{その他}) \end{cases}.$$

このとき, $d_4$ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ. (このような距離を **SNCF 距離** という)

**問 40.** $X$ を集合とし, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$d_4(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}.$$

このとき, $d$ が $X$ 上の距離であることを示せ. (このような距離を **離散距離** という.)

**問 41.** $I := [0,1]$ とし, $B(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ は有界}\}$ とおく. 次の問いに答えよ. (ここで, "(上に) 有界" は $\mathbb{R}$ の標準的な距離に関するものとする.)

(1) $f, g \in B(I)$ に対して, $\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\}$ は (空でない) 上に有界な集合であることを示せ.

(2) (1) より, $d : B(I) \times B(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\} \quad (f, g \in B([0,1]))$$

で定めることができる. このとき, $d$ は $B(I)$ 上の距離であることを示せ.

**問 42.** $(X, d)$ を距離空間とする.

(1) $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_1(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \quad (x, y \in X)$$

で定めると, $d_1$ も $X$ 上の距離であることを示せ.

(2) $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_2(x,y) := \min\{1, d(x,y)\} \quad (x, y \in X)$$

で定めると, $d_2$ も $X$ 上の距離であることを示せ.

**問 43.** $A := [0,3]$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $d$ を $A$ 上の離散距離とする. このとき, 距離空間 $(A, d)$ における $\varepsilon$-近傍 $U(1; \frac{1}{2})$, $U(1;1)$, $U(1; \frac{3}{2})$ を求め, 図示せよ.

(2) $d_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的な距離とし, $(A, d)$ を $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ の部分距離空間とする. このとき, 距離空間 $(A, d)$ における $\varepsilon$-近傍 $U(1;1)$, $U(1;2)$, $U(1;3)$ を求め, 図示せよ.