数学通論 I 演習：演習問題 (No. 9)　　(2020/05/29)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります.

提出課題 (No. 9)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 6, 7 は **A**」「0, 3, 9 は **B**」「1, 4, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 30 日　14:35

問 9-A. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

問 9-B. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

問 9-C. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

以下は自習用問題です

確認問題. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

- 写像 $f : X \to Y$ が「$a \in X$ で連続」であることの定義を述べよ.
- 写像 $f : X \to Y$ が「連続」であることの定義やその特徴付けを述べよ.
- 写像 $f : X \to Y$ が「同相写像」であることの定義を述べよ.

以下, (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. また断らなければ $\mathbb{R}^n$ は $(\mathbb{R}^n, d_1)$ (d_1 は標準的な距離) を表すとする.

問 51. $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とし, (A, d_A), (B, d_B) をそれぞれ部分距離空間とする. $f : X \to Y$ を $f(A) \subset B$ を満たす写像とする. このとき, 写像 $g : A \to B$ を $g(x) := f(x)$ $(x \in A)$ で定めると, g は連続写像であることを示せ.

問 52. X を集合とし, d_1, d_2 を X 上の距離とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(iii) $\forall U \subset X$, (U : (X, d_1) の開集合 $\Rightarrow$ U : (X, d_2) の開集合)

(iv) 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ は連続.

問 53. $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ を連続関数, $c \in \mathbb{R}$ を定数とする. 次が成り立つことを示せ:

(1) 関数の和 $f + g$, スカラー倍 cf も連続である.

(2) 関数の積 fg も連続である.

問 54. 次が成り立つことを示せ:

(1) $a \in X$ とする. このとき, 写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) := d(x, a)$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めると, f は連続である.

(2) A を空でない X の部分集合とする. このとき, 写像 $g : X \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

で定めると, g は連続である.

問 55. 写像 $f : X \to Y$ について, 次が成り立つことを示せ:

(1) f が連続 $\quad \Leftrightarrow \quad \forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) f が連続 $\quad \Leftrightarrow \quad \forall B \subset Y$, $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$.

問 56. $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ を連続写像とし, $y \in Y$ を固定する. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ は X の閉集合である.

(2) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である.

問 57. 写像 $f : X \to Y$ が **等長** であることを次で定義する: $\forall x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. 次が成り立つことを示せ:

(1) 等長写像は単射かつ連続である.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が等長写像ならば, ある $a \in \{\pm 1\}$ と $b \in \mathbb{R}$ が存在して, $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ と表される.