数学通論 I 演習：演習問題 (No. 10)　　(2020/06/03)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります.

提出課題 (No. 10)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 5, 9 は **A**」「0, 3, 4, 7 は **B**」「1, 6, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 6 月 4 日　8:45

問 10-A. d_1, d_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離, マンハッタン距離とする. $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_1(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) A の d_2 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) A が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

問 10-B. d_2, d_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離, Chebyshev 距離とする. $B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) B の d_3 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) B が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

問 10-C. d_3, d_1 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離, 標準的な距離とする. $C := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_3(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) C の d_1 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) C が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

―――― 以下は自習用問題です ――――

確認問題. (X, d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする.

- X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の「開被覆」であることの定義を述べよ.
- A が「コンパクト」であることの定義を述べよ.
- A が「有界」であることの定義を述べよ.

問 58. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A \subset X$ がコンパクトならば, $A \subset X$ は有界閉集合である.

(2) $A \subset X$ が有界閉集合ならば, $A \subset X$ はコンパクトである.

(3) $A \subset X$ がコンパクトならば, 像 $f(A) \subset Y$ もコンパクトである.

(4) $B \subset Y$ がコンパクトならば, 逆像 $f^{-1}(B) \subset X$ もコンパクトである.

(5) (X, d_X) と (Y, d_Y) が同相であるとき, (X, d_X) がコンパクトならば, (Y, d_Y) もコンパクトである.

(6) $A, B \subset X$ がコンパクトならば, 和集合 $A \cup B \subset X$ もコンパクトである.

(7) $A, B \subset X$ がコンパクトならば, 共通部分 $A \cap B \subset X$ もコンパクトである.

問 59. (X, d_X) を距離空間とする. また, $A \subset X$ とし, (A, d_A) を部分距離空間とする. このとき,「A が (X, d_X) のコンパクト集合であること」と「(A, d_A) がコンパクト距離空間であること」は同値であることを示せ.

問 60. (X, d) を距離空間とする.

(1) X が有限集合ならば, (X, d) はコンパクトであることを示せ.

(2) d を離散距離とする. (X, d) がコンパクトならば, X は有限集合であることを示せ.

問 61. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ を連続写像とする. (X, d_X) がコンパクトであるとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) f が全単射ならば, f は同相写像である.

(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \delta > 0$ s.t. $\forall x \in X,\ f(U(x;\delta)) \subset U(f(x);\varepsilon)$, すなわち, f は一様連続である.

(3) $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ はコンパクト集合である.

問 62. (X, d) を距離空間とし, $A, B \subset X$ を有界な部分集合とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) 和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$ も有界である.

(2) 内部 A°, 閉包 $\overline{A}$ も有界である.

問 63. (X, d) を距離空間とする. $x \in X$ および $A, B \subset X$ (ただし $A, B \neq \emptyset$) に対して,

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$
$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

と定める. A, B が (X, d) のコンパクト集合のとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\exists a \in A$ s.t. $d(x, A) = d(x, a)$.

(2) $\exists a \in A,\ b \in A$ s.t. $d(A, B) = d(a, b)$.