数学通論 I 演習：演習問題 (No. 11)　　(2020/06/05)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 11)

次の **A**, **B** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 5, 7, 9 は **A**」「0, 2, 4, 6, 8 は **B**」

提出期限： 2020 年 6 月 6 日　14:35

問 11-A. $A := (0, 3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(1, 3]$ が (A, d_A) の開集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\dfrac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の Cauchy 列であることを定義に従って示せ.

問 11-B. $A := (0, 3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(0, 2]$ が (A, d_A) の閉集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\dfrac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の収束列でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. (X, d) を距離空間とする.

- X の点列 $\{x_k\}$ が「$a \in X$ に収束する」ことの定義を述べよ.
- X の点列 $\{x_k\}$ が「収束列」であることの定義を述べよ.
- X の点列 $\{x_k\}$ が「Cauchy 列」であることの定義を述べよ.
- (X, d) が「完備」であることの定義を述べよ.

問 64. (X, d) を距離空間, $\{x_k\}$ を X の点列とし, $a, b \in X$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = b$ ならば, $a = b$ であることを示せ.

(2) 次の 2 条件が同値であることを示せ.

　(i) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

　(ii) $\forall U \subset X$: a を含む開集合, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \Rightarrow x_k \in U$.

(3) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は Cauchy 列であることを示せ.

問 65. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $\{x_k\}$ を X の点列, $f : X \to Y$ を連続関数とする.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{f(x_k)\}$ も収束列であることを示せ.

(2) 「$\{x_k\}$ が Cauchy 列ならば $\{f(x_k)\}$ も Cauchy 列である」が成り立つか調べよ.

問 66. (X,d) を距離空間, $\{x_k\}$ を Cauchy 列とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\{x_k\}$ は有界列である.

(2) $\{x_k\}$ が収束する部分列を持つならば, $\{x_k\}$ は収束列である.

問 67. (X,d) を距離空間とする. このとき, $A \subset X$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) A は (X,d) の閉集合である.

(ii) A の任意の点列 $\{x_k\}$ 及び任意の $a \in X$ に対して, $\lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow a \in A$.

問 68. X を集合とし, d_1, d_2 を X 上の距離とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(iii) $\forall U \subset X$, (U : (X,d_1) の開集合 $\Rightarrow$ U : (X,d_2) の開集合)

(v) 任意の $a \in X$ 及び X の任意の点列 $\{x_k\}$ に対して, $\{x_k\}$ が d_2 に関して a に収束するならば, $\{x_k\}$ は d_1 に関しても a に収束する.

問 69. 次の問いに答えよ.

(1) $(\mathbb{R},d)$ を離散距離空間とする. このとき, 点列 $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ は Cauchy 列ではないことを定義に従って示せ.

(2) (X,d) を離散距離空間とする. このとき, (X,d) は完備であることを示せ.

問 70. $I := [0,1]$ とし, $C(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f :$ 連続 $\}$ とする.

(1) $f, g \in C(I)$ に対して, $f - g \in C(I)$ であることを示せ.

(2) $d : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) := \max_{x\in I}|f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in C(I))$$

で定める. このとき, d は $C(I)$ 上の距離であることを示せ.

(3) f_k, $f \in C(I)$ $(k \in \mathbb{N})$ をそれぞれ

$$f_k(x) := \frac{x}{k}, \quad f(x) := 0 \qquad (x \in I)$$

で定める. このとき, (2) で定めた距離 d に関して $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ であることを示せ.

(4) $C(I)$ 上の距離 d_2 を

$$d_2(f,g) := \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (f, g \in C(I))$$

で定める. このとき, 距離空間 $(C(I), d_2)$ は完備でないことを示せ.