数学通論 I 演習：演習問題 (No. 1)　　(2020/04/24)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 1)

次の **A** 〜 **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 1, 2, 3 は **A**」「4, 5, 6 は **B**」「7, 8, 9 は **C**」

提出期限： 2020 年 4 月 25 日　14:35

問 1-A. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対して, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$ を f の「グラフ」という.

(1) $B := \{(t+1, t^2-2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ はある関数 $f : A \to \mathbb{R}$ のグラフとして表されることを示せ.

(2) $C := \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ はどんな関数 $f : A \to \mathbb{R}$ のグラフとしても表されないことを示せ.

問 1-B. X を集合とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) X の部分集合 A, B に対して, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

(2) X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

問 1-C. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める.

(1) f は全射でも単射でもないことを示せ.

(2) f は連続であることを (ε-δ 論法を用いて) 示せ.

―――――― 以下は自習用問題です ――――――

問 1. X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) X の部分集合 A に対して, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(2) X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(3) Y の部分集合 B に対して, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(4) Y の部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 2) (2020/05/01)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 2)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 3, 6, 9 は **A**」「1, 4, 7 は **B**」「2, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 2 日 14:35

問 2-A. $A := (-1, 2] \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 0 が A の内点であることを定義に従って示せ.

(2) 点 2 が A の内点でないことを定義に従って示せ.

問 2-B. $B := [3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 4 が B の内点であることを定義に従って示せ.

(2) 点 3 が B の内点でないことを定義に従って示せ.

問 2-C. $C := (-1, 2] \cup [3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 0 が C の内点であることを定義に従って示せ.

(2) 点 3 が C の内点でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- $\varepsilon > 0$ に対して, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の「ε-近傍 $U(a; \varepsilon)$」の定義を述べよ.
- 点 $a \in \mathbb{R}^n$ が A の「内点である」ことの定義を述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の「内部 A°」の定義やその言い換えを述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が「開集合である」ことの定義やその同値な条件を述べよ.

問 2. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A^\circ \subset A$ が成り立つことを示せ.

問 3. $A := [-1, 1]$ $(= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\})$ とおく.

(1) 点 0 が A の内点であることを示せ.

(2) 点 1 が A の内点でないことを示せ.

(3) $A^\circ = (-1, 1)$ であることを示せ.

問 4. $A := [-1,1]\times[-1,1]$ $(= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x_1\le 1,\ -1\le x_2\le 1\})$ とおく.

(1) 点 $(0,0)$ が A の内点であることを示せ.

(2) 点 $(1,1)$ が A の内点でないことを示せ.

(3) $A^\circ = (-1,1)\times(-1,1)$ であることを示せ.

問 5. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A について, その内部を求めよ. (注)

(1) $A=(1,2)$

(2) $A=[0,1)\cup(2,3]$

(3) $A=[1,\infty)$

(4) $A=(-\infty,0)\cup[1,\infty)$

(5) $A=\{0\}$

(6) $A=\mathbb{Z}$

(7) $A=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$

(8) $A=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$

問 6. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A について, その内部を求めよ.

(1) $A=(0,1)\times(2,3)$

(2) $A=[0,1]\times[2,3]$

(3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$

(4) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>1\}$

(5) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\ge 2x-1\}$

(6) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x^2\}$

問 7. $n\in\mathbb{N}$ とする. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを定義に従って示せ.

問 8. $a<b$ とする. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A の内部を求め, 開集合かどうか調べよ. (ヒント)

(1) $A=(a,b)$

(2) $A=(a,\infty)$

(3) $A=(-\infty,b)$

(4) $A=[a,b)$

(5) $A=(a,b]$

(6) $A=[a,b]$

(7) $A=[a,\infty)$

(8) $A=(-\infty,b]$

(9) $A=\{a\}$

問 9. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が $\mathbb{R}^2$ の開集合であるか調べよ.

(1) $A=(0,1)\times(2,3)$

(2) $A=[0,1]\times[2,3]$

(3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\neq 0\}$

(4) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1<x^2+y^2\le 4\}$

(5) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1<x<2\}$

(6) $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\mid 1<x<2\}$

(7) $\{(0,0)\}$

(8) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(注) 正確にいえば, 「その内部が何かになるか予想し, それを示せ」です. 以下, 「$\cdots$ を求めよ」や「$\cdots$ を調べよ」と書かれた問題も同様に解釈してください.

(ヒント) 定義に従って示す際に, 開集合であることを示すには実質的にその内部を求める必要がありますが, 開集合でないことを示すのであれば内部を求める必要はありません (なぜでしょうか？).

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 3)　　(2020/05/08)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 3)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 5 は **A**」「7, 9, 2 は **B**」「4, 6, 8, 0 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 9 日　14:35

問 3-A. $A := [-1, 2) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 2 が A の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が A の触点でないことを定義に従って示せ.

問 3-B. $B := (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が B の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < 3$ とする. 点 x が B の触点でないことを定義に従って示せ.

問 3-C. $C := [-1, 2) \cup (3, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 3 が C の触点であることを定義に従って示せ.

(2) $x < -1$ とする. 点 x が C の触点でないことを定義に従って示せ.

―――― 以下は自習用問題です ――――

確認問題. $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- 点 $a \in \mathbb{R}^n$ が A の「触点である」ことの定義を述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の「閉包 $\overline{A}$」の定義やその言い換えを述べよ.
- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が「閉集合である」ことの定義やその同値な条件を述べよ.

確認問題. $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して「A が開集合かどうか」と「A が閉集合かどうか」は互いに無関係である. 実際に, $A \subset \mathbb{R}$ で次の条件を満たすものの例をそれぞれ挙げよ.

- 開集合であるが, 閉集合でない.
- 閉集合であるが, 開集合でない.
- 開集合でも閉集合でもない.
- 開集合でも閉集合でもある.

問 10. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A \subset \overline{A}$ が成り立つことを示せ.

問 11. $A := (0,1) \cup [2,\infty) \subset \mathbb{R}$ とおく.

(1) 点 0 が A の触点であることを示せ.

(2) 点 -1 が A の触点でないことを示せ.

(3) $\overline{A} \supset [0,1] \cup [2,\infty)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\overline{A} \subset [0,1] \cup [2,\infty)$ が成り立つことを, 対偶を考えることで示せ.

問 12. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A について, その閉包を求めよ.

(1) $A = (1,2)$

(2) $A = [0,1) \cup (2,3]$

(3) $A = [1,\infty)$

(4) $A = (-\infty,0) \cup [1,\infty)$

(5) $A = \{0\}$

(6) $A = \mathbb{Z}$

(7) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(8) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n,n+1)$

問 13. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A について, その閉包を求めよ.

(1) $A = (0,1) \times (2,3)$

(2) $A = [0,1] \times [2,3]$

(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x - 1\}$

(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

問 14. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを定義に従って示せ.

問 15. 問 8 で挙げた各部分集合が $\mathbb{R}$ の閉集合かどうか調べよ.

問 16. 問 9 で挙げた各部分集合が $\mathbb{R}^2$ の閉集合かどうか調べよ.

問 17. 次の問いに答えよ (開集合の「無限」族の共通部分は開集合であるとは限らない, また閉集合の「無限」族の和集合は閉集合であるとは限らないことに注意せよ).

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $A_n := (0, 1 + \frac{1}{n})$ で定めるとき, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ.

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $B_n := [0, 2 - \frac{1}{n}]$ で定めるとき, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ を求めよ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 4)　(2020/05/13)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 4)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 6, 7 は **A**」「0, 3, 9 は **B**」「1, 4, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 14 日　8:45

問 4-A. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

問 4-B. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x>0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

問 4-C. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) f は点 1 で連続であることを定義に従って示せ.

(2) f は点 0 で連続でないことを定義に従って示せ.

―――― 以下は自習用問題です ――――

確認問題. $a \in \mathbb{R}^n$ とする.

- 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が 「点 a で連続である」ことの定義を述べよ.
- 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が 「連続である」ことの定義や同値条件を述べよ.

確認問題. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := x^2$ で定める. 次の問いに答えよ. (「開集合の連続写像による "逆像" は開集合となる」が, 「開集合の連続写像による "像" は開集合とは限らない」ことに注意せよ.)

- $A := (-1, 2)$ の f による像 $f(A)$ を求めよ.
- $B := (-1, 4)$ の f による逆像 $f^{-1}(B)$ を求めよ.

以下, 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が連続であることの定義を

条件 A： $\forall a\in\mathbb{R}^n, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $f(U(a;\delta))\subset U(f(a);\varepsilon)$ (定義 5.3)

条件 B： $\forall U\subset\mathbb{R}^m$: 開集合, $f^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^n$: 開集合 (定理 5.5)

とする (この 2 つの条件が同値であることは授業でやった).

問 18. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\begin{cases}0 & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 1 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

で定める.

(1) f が連続でないことを **条件 A** を用いて示せ.

(2) f が連続でないことを **条件 B** を用いて示せ.

問 19. 次の写像が連続であることを示せ.

(1) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n : x\mapsto x$. (このような写像を **恒等写像** という.)

(2) $a\in\mathbb{R}^m$ に対して, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m : x\mapsto a$. (このような写像を **定値写像** という.)

(3) $i\in\{1,\dots n\}$ に対して, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} : (x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$. (このような写像を **射影** という.)

(4) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} : x\mapsto\|x\|$.

問 20. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ を連続写像とし, $h:=g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ とおく.

(1) h が連続であることを **条件 A** を用いて示せ.

(2) h が連続であることを **条件 B** を用いて示せ.

問 21. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を写像とし, 各 $i\in\{1,\dots m\}$ に対して, 写像 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))\qquad(x\in\mathbb{R}^n)$$

で定める.

(1) f が連続ならば, f_i はすべて連続であることを示せ.

(2) 逆に, f_i がすべて連続ならば, f は連続であることを示せ.

問 22. A を実 $m\times n$ 行列とし, 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $f(x):=Ax$ で定める. ここで, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の元をそれぞれ n 次, m 次の縦ベクトルとみなし, Ax は行列の積であるとする. このとき, f は連続写像であることを示せ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 5)　(2020/05/15)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 5)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 7 は **A**」「0, 2, 4, 5 は **B**」「6, 8, 9 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 16 日　14:35

問 5-A. $A := (0,2) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $U_n := (0, 2 - \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A の開被覆であることを示せ. ただし, $\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) A がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

問 5-B. $B := [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $r > 0$ に対して, $U_r := (0, r) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_r\}_{r>0}$ が B の開被覆であることを示せ. ただし, $\mathbb{R}$ の開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) B がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

問 5-C. $C := (-2, 1] \subset \mathbb{R}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\lambda \in (0,2)$ に対して, $U_\lambda := (-\lambda, \lambda) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in(0,2)}$ が C の開被覆であることを示せ. ただし, 開区間が開集合であることは用いてよい.

(2) C がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, (1) の結果は用いてよい.

以下は自習用問題です

確認問題. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする.

- $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A を「被覆する」ことの定義を述べよ.
- $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の「開被覆」であることの定義を述べよ.
- A が「コンパクト」であることの定義を述べよ.
- A が「有界」であることの定義を述べよ.

問 23. $A := (0,3) \subset \mathbb{R}$ とおく. 次で定める $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の開被覆であることを示せ. また, $\{U_\lambda\}$ を用いて「A がコンパクト集合でないこと」を示せるかどうか調べよ.

(1) $U_\lambda := U(1;\lambda) \quad (\lambda \in \{1,2\})$

(2) $U_\lambda := U(\lambda;1) \quad (\lambda \in \{1,2\})$

(3) $U_\lambda := U(1;\lambda) \quad (\lambda \in (1,2))$

(4) $U_\lambda := U(\lambda;1) \quad (\lambda \in (1,2))$

(5) $U_\lambda := (\frac{1}{\lambda},3) \quad (\lambda \in \mathbb{N})$

(6) $U_\lambda := (0,3+\frac{1}{\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbb{N})$

問 24. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ. ただし, $a < b$ とする.

(1) $A = \mathbb{R}$

(2) $A = (a,b)$

(3) $A = (a,b]$

(4) $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$

問 25. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A がコンパクト集合でないことを定義に従って示せ.

(1) $A = \mathbb{R}^2$

(2) $A = U((0,0);1)$

(3) $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$

(4) $A = U((0,0);1) \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$

問 26. $A, B \subset \mathbb{R}$ をコンパクト集合とする.

(1) $A \cup B$ はコンパクトであることを示せ.

(2) $A \cap B$ はコンパクトであることを示せ.

(3) $A \times B := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A,\ b \in B\}$ はコンパクトであることを示せ.

問 27. $A \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合とする. このとき, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) A は有界である.

(ii) $\forall a \in A, \exists R > 0$ s.t. $A \subset U(a;R)$.

問 28. A, B を $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合とする.

(1) 和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$ も有界であることを示せ.

(2) 内部 A°, 閉包 $\overline{A}$ も有界であることを示せ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 6)　(2020/05/16)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 6)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 1, 5, 8 は **A**」「2, 6, 7 は **B**」「3, 4, 9 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 17 日　14:35

問 6-A. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (k^2, \dfrac{1}{k^3})\ \ (k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

問 6-B. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (2^k, \dfrac{1}{3^k})\ \ (k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

問 6-C. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{x_k\}$ を $x_k := (\sqrt{k}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}})\ \ (k = 1, 2, \dots)$ で定める.

(1) $\{x_k\}$ は収束しないことを定義に従って示せ.

(2) $\{x_k\}$ は Cauchy 列でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする.

- $\{x_k\}$ が点 $a \in \mathbb{R}^n$ に「収束する」ことの定義を述べよ.
- $\{x_k\}$ が「収束列」であることの定義を述べよ.
- $\{x_k\}$ が「Cauchy 列」であることの定義を述べよ.
- $\mathbb{R}^n$ の「完備性」を説明せよ.

問 29. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $a, b \in \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ ならば, $a = b$ であることを示せ.

(2) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ならば, $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|a\|$ であることを示せ.

(3) 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

(ii) $\forall U \subset \mathbb{R}^n$: a を含む開集合, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \Rightarrow x_k \in U$.

問 30. $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} y_k = b$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$.

(2) $\lim_{k\to\infty} (\lambda x_k) = \lambda a$.

問 31. 開区間 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ が閉集合でないことを, 命題 7.3 を用いて示せ.

問 32. A を $\mathbb{R}^n$ の (空でない) 部分集合とする. 点 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) a は A の触点である.

(ii) a に収束するような A 内の点列 $\{x_k\}$ が存在する.

問 33. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続関数とする. このとき, $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{f(x_k)\}$ も収束列であることを示せ.

問 34. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とし, $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\mathbb{R}$ の点列 $\{x_i^{(k)}\}$ を

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

で定める.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば, $\{x_i^{(k)}\}$ はすべて収束列であることを示せ.

(2) 逆に, $\{x_i^{(k)}\}$ がすべて収束列ならば, $\{x_k\}$ は収束列であることを示せ.

問 35. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする. このとき, $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は Cauchy 列であることを示せ.

以下, 点列 $\{x_k\}$ が **有界**であるとは, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ が有界であることとする.

問 36. $\{x_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は有界であることを示せ.

(2) $\{x_k\}$ が Cauchy 列ならば $\{x_k\}$ は有界であることを示せ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 7)　(2020/05/20)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 7)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「0, 2, 9 は **A**」「3, 5, 8 は **B**」「1, 4, 6, 7 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 21 日　8:45

問 7-A. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|+|x_2| \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

問 7-B. $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

問 7-C. $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\})$ がコンパクト集合であることを, Heine–Borel の定理を用いて示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. Heine–Borel の定理の主張 (すなわち, Euclid 空間におけるコンパクト性の同値条件) を述べよ.

以下は発展問題です

問 37. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_k\}$ と点 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) $\{x_n\}$ の部分列で, a に収束するものが存在する.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in U(a; \varepsilon)\}$ が無限集合である.

上の条件を満たすとき, $a \in \mathbb{R}^n$ は点列 $\{x_k\}$ の **密集点** (集積点) であるという.

問 38. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) A はコンパクトである.

(ii) A 内の任意の点列は A 内に密集点を持つ.

上の条件 (ii) を満たすとき, 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ は **点列コンパクト** であるという.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 8) (2020/05/27)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 8)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 5, 9 は **A**」「0, 3, 4, 7 は **B**」「1, 6, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 28 日 10:15

問 8-A. d_1, d_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離, マンハッタン距離とする. また, d_i $(i=1,2)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする. 次の問いに答えよ.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_2(x;\delta) \subset U_1(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合でもあることを示せ.

問 8-B. d_2, d_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離, Chebyshev 距離とする. また, d_i $(i=2,3)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする. 次の問いに答えよ.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_3(x;\delta) \subset U_2(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合でもあることを示せ.

問 8-C. d_3, d_1 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離, 標準的な距離とする. また, d_i $(i=3,1)$ に関する ε-近傍を $U_i(x;\varepsilon)$ のように表すこととする. 次の問いに答えよ.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_1(x;\delta) \subset U_3(x;\varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ の開集合ならば $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の開集合でもあることを示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. X を集合, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする. このとき, (X,d) が「距離空間」である, すなわち, d が X 上の「距離 (距離関数)」であることの定義を述べよ.

確認問題. (X,d) を距離空間とし, $x \in X$, $A \subset X$ とする.

- 点 $x \in X$ の「ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$」の定義を述べよ.
- 点 $x \in X$ が A の「内点」であることの定義を述べよ.
- A の「内部 A°」の定義やその言い換えを述べよ.
- A が「開集合」であることの定義の同値条件を述べよ.
- 点 $x \in X$ が A の「触点」であることの定義を述べよ.
- A の「閉包 $\overline{A}$」の定義やその言い換えを述べよ.
- A が「閉集合」であることの定義の同値条件を述べよ.

問 39. $d_4 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$d_4(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & (\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x = ty) \\ \|x\| + \|y\| & (\text{その他}) \end{cases}.$$

このとき, d_4 が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ. (このような距離を **SNCF 距離** という)

問 40. X を集合とし, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$d_4(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}.$$

このとき, d が X 上の距離であることを示せ. (このような距離を **離散距離** という.)

問 41. $I := [0,1]$ とし, $B(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ は有界}\}$ とおく. 次の問いに答えよ. (ここで, "(上に) 有界" は $\mathbb{R}$ の標準的な距離に関するものとする.)

(1) $f, g \in B(I)$ に対して, $\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\}$ は (空でない) 上に有界な集合であることを示せ.

(2) (1) より, $d : B(I) \times B(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\} \quad (f, g \in B([0,1]))$$

で定めることができる. このとき, d は $B(I)$ 上の距離であることを示せ.

問 42. (X, d) を距離空間とする.

(1) $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_1(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \quad (x, y \in X)$$

で定めると, d_1 も X 上の距離であることを示せ.

(2) $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_2(x,y) := \min\{1, d(x,y)\} \quad (x, y \in X)$$

で定めると, d_2 も X 上の距離であることを示せ.

問 43. $A := [0,3]$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) d を A 上の離散距離とする. このとき, 距離空間 (A, d) における ε-近傍 $U(1; \frac{1}{2})$, $U(1;1)$, $U(1; \frac{3}{2})$ を求め, 図示せよ.

(2) $d_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的な距離とし, (A, d) を $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ の部分距離空間とする. このとき, 距離空間 (A, d) における ε-近傍 $U(1;1)$, $U(1;2)$, $U(1;3)$ を求め, 図示せよ.

問 44. d_4 を $\mathbb{R}^2$ 上の SNCF 距離とする. このとき, 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_4)$ における ε-近傍 $U(0;2)$, $U(1;2)$, $U(2;2)$ を求め, 図示せよ.

問 45. $A := (-1, 2]$ とする. $d_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的な距離とし, (A, d) を $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ の部分距離空間とする. このとき, 次の部分集合が (A, d) において開集合かどうか, また閉集合かどうかそれぞれ調べよ.

(1) $(-1, 0]$ (2) $(0, 1]$ (3) $(1, 2]$ (4) $\{2\}$

問 46. (X, d) を距離空間とし, $A, B \subset X$ とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $A^\circ \subset A$. (2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. (3) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(4) $A \subset \overline{A}$. (5) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. (6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

問 47. (X, d) を距離空間とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) U_1, U_2 が開集合ならば, $U_1 \cap U_2$ も開集合である.

(2) U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ も開集合である.

問 48. (X, d_X) を距離空間とする. $A \subset X$ を部分集合とし, (A, d_A) を (X, d_X) の部分距離空間とする. このとき, $U \subset A$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) U は (A, d_A) の開集合である.

(ii) $\exists O : (X, d_X)$ の開集合 s.t. $U = O \cap A$.

問 49. (X, d) を距離空間とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x; \varepsilon) \cap U(y; \varepsilon) = \emptyset$.

(2) 一点集合 $\{x\}$ $(x \in X)$ は閉集合である.

問 50. X を集合とし, d_1, d_2 を X 上の距離とする. 距離空間 (X, d_i) $(i = 1, 2)$ に関する ε-近傍を $U_i(x; \varepsilon)$ のように表すこととする. 以下の 3 条件

(i) $\exists c > 0$ s.t. $\forall x, y \in X$, $d_1(x, y) \leq c d_2(x, y)$

(ii) $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $U_2(x; \delta) \subset U_1(x; \varepsilon)$

(iii) $\forall U \subset X$, $(U : (X, d_1)$ の開集合 $\Rightarrow U : (X, d_2)$ の開集合$)$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 「(i) $\Rightarrow$ (ii)」が成り立つことを示せ.

(2) 「(ii) $\Rightarrow$ (iii)」が成り立つことを示せ.

(3) 「(iii) $\Rightarrow$ (i)」が成り立つかどうか調べよ.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 9) (2020/05/29)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 9)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 6, 7 は **A**」「0, 3, 9 は **B**」「1, 4, 5, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 5 月 30 日　14:35

問 9-A. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 2x-1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 3x & (x\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f:(\mathbb{R},d_1)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

問 9-B. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 3x & (x>0 \text{ のとき}) \\ -x+1 & (x\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f:(\mathbb{R},d_1)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

問 9-C. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} -x+1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

(1) $f:(\mathbb{R},d_1)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続でないことを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d_1 は $\mathbb{R}$ の標準的な距離とする.

(2) $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d_1)$ が連続であることを, 連続写像の特徴付け「開集合の逆像は開集合」を用いて示せ. ただし, d は $\mathbb{R}$ の離散距離とする.

以下は自習用問題です

確認問題. (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とする.

- 写像 $f:X\to Y$ が「$a\in X$ で連続」であることの定義を述べよ.
- 写像 $f:X\to Y$ が「連続」であることの定義やその特徴付けを述べよ.
- 写像 $f:X\to Y$ が「同相写像」であることの定義を述べよ.

以下, (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. また断らなければ $\mathbb{R}^n$ は $(\mathbb{R}^n, d_1)$ (d_1 は標準的な距離) を表すとする.

問 51. $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とし, (A, d_A), (B, d_B) をそれぞれ部分距離空間とする. $f : X \to Y$ を $f(A) \subset B$ を満たす写像とする. このとき, 写像 $g : A \to B$ を $g(x) := f(x)$ $(x \in A)$ で定めると, g は連続写像であることを示せ.

問 52. X を集合とし, d_1, d_2 を X 上の距離とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(iii) $\forall U \subset X$, (U : (X, d_1) の開集合 $\Rightarrow$ U : (X, d_2) の開集合)

(iv) 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ は連続.

問 53. $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ を連続関数, $c \in \mathbb{R}$ を定数とする. 次が成り立つことを示せ:

(1) 関数の和 $f + g$, スカラー倍 cf も連続である.

(2) 関数の積 fg も連続である.

問 54. 次が成り立つことを示せ:

(1) $a \in X$ とする. このとき, 写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x) := d(x, a)$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めると, f は連続である.

(2) A を空でない X の部分集合とする. このとき, 写像 $g : X \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定めると, g は連続である.

問 55. 写像 $f : X \to Y$ について, 次が成り立つことを示せ:

(1) f が連続 $\quad\Leftrightarrow\quad \forall A \subset X,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) f が連続 $\quad\Leftrightarrow\quad \forall B \subset Y,\ f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$.

問 56. $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ を連続写像とし, $y \in Y$ を固定する. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ は X の閉集合である.

(2) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である.

問 57. 写像 $f : X \to Y$ が **等長** であることを次で定義する: $\forall x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. 次が成り立つことを示せ:

(1) 等長写像は単射かつ連続である.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が等長写像ならば, ある $a \in \{\pm 1\}$ と $b \in \mathbb{R}$ が存在して, $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ と表される.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 10)　　(2020/06/03)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html` にも置いてあります.

提出課題 (No. 10)

次の **A** ～ **C** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「2, 5, 9 は **A**」「0, 3, 4, 7 は **B**」「1, 6, 8 は **C**」

提出期限： 2020 年 6 月 4 日　8:45

問 10-A. d_1, d_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な距離, マンハッタン距離とする. $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_1(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) A の d_2 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) A が $(\mathbb{R}^2, d_2)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

問 10-B. d_2, d_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のマンハッタン距離, Chebyshev 距離とする. $B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) B の d_3 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) B が $(\mathbb{R}^2, d_3)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

問 10-C. d_3, d_1 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の Chebyshev 距離, 標準的な距離とする. $C := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_3(x, (0,0)) < 1\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) C の d_1 に関する開被覆を 1 つ与え, 実際に開被覆であることを示せ.

(2) C が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ のコンパクト集合でないことを, コンパクトの定義に従って示せ. (1) の結果は用いてよい.

以下は自習用問題です

確認問題. (X, d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする.

- X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の「開被覆」であることの定義を述べよ.
- A が「コンパクト」であることの定義を述べよ.
- A が「有界」であることの定義を述べよ.

問 58. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A \subset X$ がコンパクトならば, $A \subset X$ は有界閉集合である.

(2) $A \subset X$ が有界閉集合ならば, $A \subset X$ はコンパクトである.

(3) $A \subset X$ がコンパクトならば, 像 $f(A) \subset Y$ もコンパクトである.

(4) $B \subset Y$ がコンパクトならば, 逆像 $f^{-1}(B) \subset X$ もコンパクトである.

(5) (X, d_X) と (Y, d_Y) が同相であるとき, (X, d_X) がコンパクトならば, (Y, d_Y) もコンパクトである.

(6) $A, B \subset X$ がコンパクトならば, 和集合 $A \cup B \subset X$ もコンパクトである.

(7) $A, B \subset X$ がコンパクトならば, 共通部分 $A \cap B \subset X$ もコンパクトである.

問 59. (X, d_X) を距離空間とする. また, $A \subset X$ とし, (A, d_A) を部分距離空間とする. このとき,「A が (X, d_X) のコンパクト集合であること」と「(A, d_A) がコンパクト距離空間であること」は同値であることを示せ.

問 60. (X, d) を距離空間とする.

(1) X が有限集合ならば, (X, d) はコンパクトであることを示せ.

(2) d を離散距離とする. (X, d) がコンパクトならば, X は有限集合であることを示せ.

問 61. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ を連続写像とする. (X, d_X) がコンパクトであるとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) f が全単射ならば, f は同相写像である.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$ s.t. $\forall x \in X$, $f(U(x; \delta)) \subset U(f(x); \varepsilon)$, すなわち, f は一様連続である.

(3) $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ はコンパクト集合である.

問 62. (X, d) を距離空間とし, $A, B \subset X$ を有界な部分集合とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) 和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$ も有界である.

(2) 内部 A°, 閉包 $\overline{A}$ も有界である.

問 63. (X, d) を距離空間とする. $x \in X$ および $A, B \subset X$ (ただし $A, B \neq \emptyset$) に対して,

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$
$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

と定める. A, B が (X, d) のコンパクト集合のとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\exists a \in A$ s.t. $d(x, A) = d(x, a)$.

(2) $\exists a \in A,\ b \in A$ s.t. $d(A, B) = d(a, b)$.

数学通論 I 演習：演習問題 (No. 11)　　(2020/06/05)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html にも置いてあります.

提出課題 (No. 11)

次の **A**, **B** の問題から指定された 1 問を解き, レポートとして提出すること.

指定問題： 学籍番号下 1 桁が「1, 3, 5, 7, 9 は **A**」「0, 2, 4, 6, 8 は **B**」

提出期限： 2020 年 6 月 6 日　14:35

問 11-A. $A := (0, 3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(1, 3]$ が (A, d_A) の開集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の Cauchy 列であることを定義に従って示せ.

問 11-B. $A := (0, 3]$ とし, (A, d_A) を Euclid 空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分距離空間とする.

(1) $(0, 2]$ が (A, d_A) の閉集合であるか予想し, それを示せ.

(2) $\{\frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ が (A, d_A) の収束列でないことを定義に従って示せ.

以下は自習用問題です

確認問題. (X, d) を距離空間とする.

- X の点列 $\{x_k\}$ が「$a \in X$ に収束する」ことの定義を述べよ.
- X の点列 $\{x_k\}$ が「収束列」であることの定義を述べよ.
- X の点列 $\{x_k\}$ が「Cauchy 列」であることの定義を述べよ.
- (X, d) が「完備」であることの定義を述べよ.

問 64. (X, d) を距離空間, $\{x_k\}$ を X の点列とし, $a, b \in X$ とする.

(1) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to\infty} x_k = b$ ならば, $a = b$ であることを示せ.

(2) 次の 2 条件が同値であることを示せ.

　(i) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

　(ii) $\forall U \subset X : a$ を含む開集合, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \Rightarrow x_k \in U$.

(3) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{x_k\}$ は Cauchy 列であることを示せ.

問 65. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $\{x_k\}$ を X の点列, $f : X \to Y$ を連続関数とする.

(1) $\{x_k\}$ が収束列ならば $\{f(x_k)\}$ も収束列であることを示せ.

(2) 「$\{x_k\}$ が Cauchy 列ならば $\{f(x_k)\}$ も Cauchy 列である」が成り立つか調べよ.

問 66. (X,d) を距離空間, $\{x_k\}$ を Cauchy 列とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\{x_k\}$ は有界列である.

(2) $\{x_k\}$ が収束する部分列を持つならば, $\{x_k\}$ は収束列である.

問 67. (X,d) を距離空間とする. このとき, $A \subset X$ に対して, 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(i) A は (X,d) の閉集合である.

(ii) A の任意の点列 $\{x_k\}$ 及び任意の $a \in X$ に対して, $\lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow a \in A$.

問 68. X を集合とし, d_1, d_2 を X 上の距離とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(iii) $\forall U \subset X$, (U : (X,d_1) の開集合 $\Rightarrow$ U : (X,d_2) の開集合)

(v) 任意の $a \in X$ 及び X の任意の点列 $\{x_k\}$ に対して, $\{x_k\}$ が d_2 に関して a に収束するならば, $\{x_k\}$ は d_1 に関しても a に収束する.

問 69. 次の問いに答えよ.

(1) $(\mathbb{R},d)$ を離散距離空間とする. このとき, 点列 $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ は Cauchy 列ではないことを定義に従って示せ.

(2) (X,d) を離散距離空間とする. このとき, (X,d) は完備であることを示せ.

問 70. $I := [0,1]$ とし, $C(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f:\ \text{連続}\}$ とする.

(1) $f, g \in C(I)$ に対して, $f - g \in C(I)$ であることを示せ.

(2) $d : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) := \max_{x\in I}|f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in C(I))$$

で定める. このとき, d は $C(I)$ 上の距離であることを示せ.

(3) f_k, $f \in C(I)$ $(k \in \mathbb{N})$ をそれぞれ

$$f_k(x) := \frac{x}{k}, \quad f(x) := 0 \qquad (x \in I)$$

で定める. このとき, (2) で定めた距離 d に関して $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ であることを示せ.

(4) $C(I)$ 上の距離 d_2 を

$$d_2(f,g) := \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (f, g \in C(I))$$

で定める. このとき, 距離空間 $(C(I), d_2)$ は完備でないことを示せ.

数学通論 I 演習：提出課題用紙

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

問 $\boxed{}$

数学通論 I 演習：ガイダンス (2020/04/22)

担当教員について

- 氏名：久保亮（くぼあきら）
- メール：`akira-kubo@hiroshima-u.ac.jp`
- 授業ホームページ：
`https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/20tsuron1ex.html`

授業の流れ

今年度の数学通論 I 演習では, 通常の演習授業は行わず, 各自で課題 (演習問題) を解き, その解答を提出する, という形式で行います．1 回の授業の流れは

(1) 演習の時間になったら, Bb9 上にある演習問題プリントをダウンロードまたは印刷する

(2) プリントに載っている問題から, 指定された問題を解き, ノート等に清書する

(3) その答案をスキャンまたはカメラで撮影し, そのファイルを Bb9 上で提出する

となります.

課題の提出方法について

- 解答ファイルの提出はすべて Bb9 で行います.

- 提出する際には, ノートやプリントに書いた答案をファイル化する必要があります. 次のような方法で答案を PDF ファイルに変換してから提出してください (おそらく多くの方は (B) の方法が一番楽なのではないかと思います).

  (A) A4 用紙に答案を書き, それをスキャナーやスキャン機能を持つプリンターでスキャンし, PDF 化する.

  (B) ノートやプリントに答案を書き, それをスマホやタブレットの「スキャンアプリ (例：`Microsoft Office Lens`)」を使って写真を撮り, PDF 化する.

  (C) タブレットのノートアプリを使って答案を書き, それを PDF 化する.

  ただし, 上記の方法が難しい場合には「答案を写真に撮り, 画像ファイルとして提出する」という方法でも構いません. なお, 今回は「自筆の答案をファイル化したもの」のみ認め, 「TeX や Word などで書いた答案」は認めないこととします.

- 提出する際のファイル名は「学籍番号 (`b******`)_授業日 (4 桁)」とし, 複数の写真を提出する場合はそのあとにページ番号として, `(1)`, `(2)`, ... をつけてください. 拡張子は `.pdf` か `.jpg` でお願いします (例：`b190000_0424.pdf`, `b190000_0424(1).jpg`).

- 指定問題のうち, どの問題を選択するかのルールはプリントに書いてあります (ただし, ルールは毎回変わますので注意してください.)
- 提出期限もプリントに書いてあります. 現時点では「授業開始時間から 24 時間」を想定していますが, 提出状況を見て変更する場合があります.
- 提出された答案は採点し, 返却する予定です.

指定課題の解き方 (答案の書き方) について

- 解く際は最初に「示すこと」を書き, それに従って解いてください. 示すことが書かれていない, また示すことに従って示していない答案は評価が低くなります.
- 答案用紙には, 1 ページ目に学籍番号・氏名・問題番号を必ず記入してください. 2 ページ目以降には必要ありません. また表紙も必要ありません.
- Bb9 や久保のホームページに答案用紙のサンプルを掲載します. 必要な人は印刷するなどして利用してください.

演習問題プリントについて

- 演習問題プリントには「指定問題」のほかに「確認問題」「自習用問題」が載っています. 提出するのは「指定問題」のうちの 1 問です. それ以外の指定問題や自習用問題は各自で自習に使ってください.
- 演習問題の解答例については, 指定問題のみ公開する予定です. (公開方法やその時期についても現在検討中のため, 決まり次第お伝えします.)

成績について

- 「指定課題の提出状況, また課題の成績」「中間試験・期末試験」を踏まえて総合的に判断します. なお, 合否については講義 (数学通論 I) と連動します.

その他

- 授業内容については, もみじや久保のホームページに掲載します.
- 質問については, メールでも構いませんが, 質問用のフォームを用意しますので, そちらにお願いします. フォームの URL はもみじでお知らせします.
- 急遽オンラインでの授業を行うことになったため, 授業方法についてはいろいろと不備があると思います. こうしてほしいという希望があれば, 上記の質問フォームにコメントしてください. また実際にやってみて, あるいはそのような希望を受けて, 途中でやり方を変更する場合があります. その場合ももみじ等でお知らせします.