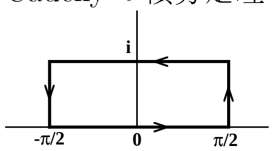
平成 13 年 6 月 13 日

## 物理科学セミナー B　演習問題　10

1. 複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x+iy)$ が領域 $D$ で正則なら、この領域 $D$ で、以下が成り立つことを示せ。
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$ および $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$
   (b) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ として、$\Delta u(x,y) = 0$、$\Delta v(x,y) = 0$
2. 以下の複素関数 $w = f(z)$ により、複素平面 $z = x + iy$ 上の直線 $x = c$ 及び $y = c$ は複素平面 $w = u + iv$ 上ではどのような曲線に写るか？
   (a) $f(z) = z^2$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$
   (c) $f(z) = e^z$
3. 関数 $f(x,y) = xy^2$ に対して、次の経路に沿った線積分を求めよ。
   (a) 折線 $(0,1) \to (1,1) \to (1,0)$
   (b) 円弧 $y = \sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$
4. 複素平面上の $z = a$ を中心とする半径 $r$ の円を反時計回りに一周する積分路を $C$ とするとき、以下を示せ。

$$\int_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & (n \text{ が } -1 \text{ 以外の整数}) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases}$$

   (ヒント:$z = a + re^{i\theta}$ とおけ。)
5. $\cos z$ に対し下図のような積分路を一周する積分 $\int \cos z\,dz$ を実積分に直して計算し、Cauchy の積分定理を確かめよ。




6. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。
   (a) $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2x(t) - y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$