

## 物理科学セミナー B 演習問題 11

## 1. 連立 1 階微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (a) 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$ 、固有ベクトル  $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}$ 、 $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$  を求めよ。
- (b) 行列  $Q = (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$  と置くととき、変換  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  によって、与えられた微分方程式が以下の形に書けることを示せ。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y_1 \\ \frac{d}{dt}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

さらに、この  $y_1, y_2$  についての微分方程式の一般解を求めよ。

- (c) 逆変換  $\vec{x} = Q\vec{y}$  により、与えられた連立微分方程式の一般解を求めよ。
- (d)  $t = 0$  のとき、 $x_1 = 1, x_2 = 0$  となるような解を求めよ。
2. 連立 1 階微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を解こう。

- (a) 行列  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値  $\lambda$ 、固有ベクトル  $\vec{q}$  を求めよ。
- (b)  $B\vec{v} = \lambda\vec{v} + \vec{q}$  を満たす  $\vec{v}$  を求めよ。
- (c)  $P = (\vec{q}, \vec{v})$  として変数変換  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  により、 $\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y_1 \\ \frac{d}{dt}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  と書けることを示せ。さらに、この  $y_1, y_2$  に対する微分方程式を解け。
- (d) 逆変換  $\vec{x} = P\vec{y}$  により、この微分方程式の一般解を求めよ。
3. 電荷  $q$  を持った質量  $m$  の粒子が一様な磁場 (磁束密度  $\vec{B}$ ) の中で運動しているとき、この粒子の速度を  $\vec{v}$  とするとローレンツ力  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$  が働く。
- (a) 磁場が  $z$  軸方向を向いているとき、( $B_x = B_y = 0, B_z = B > 0$ ) この粒子の運動方程式をたて、一般解を求めよ。
- (b) 時刻  $t = 0$  で粒子が原点  $\vec{r} = 0$  におり、 $x$  軸に沿って初速度  $v_0$  を持っている ( $v_x = v_0, v_y = v_z = 0$ ) としてこの粒子の運動を求めよ。それはどのような運動か？