平成 13 年 7 月 11 日

物理科学セミナー B　演習問題　14

1. 水平な面から長さ l の 2 本のひもがつるされており、それぞれ先端に質量 m の質点が付けられている。この 2 つの質点はバネ定数 k のバネで結ばれており、2 本のひもが鉛直な状態で自然長になっているものとする。この質点が微小な振動をするとするとき、以下の問いに答えよ。
   (a) ひもの鉛直方向からの変位角を θ_1、θ_2 としてラグランジアンを求めよ。だたし、変位角は小さいとし、バネの方向に対して垂直な運動については考えないものとする。
   (b) 微小振動の基準振動を求め、その物理的意味について述べよ。
   (c) 微小振動の一般解を求めよ。
   (d) 時刻 $t = 0$ において $\theta_1 = a$,$\theta_2 = 0$,$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ をみたす微小振動を求めよ。
2. 微分方程式

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{1}{2} x \frac{d}{dx} y(x) + \frac{1}{4} x y(x) = 0$$

について、解がベキ級数

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda+1} + a_2 x^{\lambda+2} + \cdots$$

の形に表されると仮定して、この微分方程式を解こう。
   (a) 上の級数を微分方程式に代入し、左辺各項の係数を 0 とおくと

$$\begin{aligned} \lambda(2\lambda - 1) a_0 &= 0 \\ (\lambda + n + 1)(2\lambda + 2n + 1) a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n &= 0 \end{aligned}$$

   となることを示せ。
   (b) (a) で $a_0 \neq 0$ とすると、第 1 式より λ は 0 または $\frac{1}{2}$ である。$\lambda = 0$ および $\lambda = \frac{1}{2}$ それぞれの場合について級数解を求め、この方程式の一般解が

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{x} + C_2 \sin\sqrt{x}$$

   であることを示せ。
3. Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} y(x) + \Bigl(1 - \frac{m^2}{x^2}\Bigr) y(x) = 0$$

について、問 2 と同様、解がベキ級数 $y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$ で表されるとして、
   (a) 係数 a_n の間に以下の関係があることを示せ。

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - m^2) a_0 &= 0 \\ \{(\lambda + 1)^2 - m^2\} a_1 &= 0 \\ n(n + 2m) a_n + a_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

   (b) このベキ級数解は $a_0 = \frac{1}{2^m m!}$ と置くと Bessel 関数

$$J_m(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(m+l)!} \Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)^{m+2l}$$

   と一致することを示せ。