物理科学セミナーB　演習問題　15　　　　　　　　**平成 13 年 7 月 18 日**

1. 次の $x(t)$ に対する微分方程式の一般解を求めよ。
   (a) $t^2x' + x = 0$
   (b) $xx' + t = 0$
   (c) $x' + tx = 0$
   (d) $x'' + 3x = 0$
   (e) $x'' - 2x' + x = 0$
   (f) $x'' + x' - 12x = 0$
   (g) $x'' + 6x' + 13x = 0$
   (h) $x^{(4)} - 2x''' - x'' + 2x' = 0$
   (i) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$
   (j) $x'' + 4x = -2\cos t$
   (k) $x'' + 9x = 2t^2 + 4t + 7$

2. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。
   (a) $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2x(t) - y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$

3. 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとに解け。
   (a) $x' + t^2x = 0 \quad (x(0) = 1)$
   (b) $x'' + 4x = 0 \quad (x(0) = 1, x'(0) = 0)$
   (c) $x'' + 3x = \sin t \quad (x(0) = 0, x'(0) = 1)$

4. x 軸上の調和振動子に対し、時間に依存する外力 $F_0\cos\omega t$ が働いている場合を考える。この時、ニュートン方程式は
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos\omega t$$
である。以下の問いに答えよ。
   (a) 　外力が無い場合 ($F_0 = 0$) について、上の方程式に対する一般解を求めよ。
   (b) 　次に $x(t) = A\cos\omega t$ と仮定し、上の方程式を満たすような A をもとめよ。また、求めた A に対し、ω を横軸、$|A|$ を縦軸にして、概略をグラフに描け。
   (c) 　$t = 0$ で $x = x_0$、$\frac{dx}{dt} = 0$ であるとき、この質点の運動を求めよ。

5. 摩擦のない水平な面の上に下図のように x 軸にそって 2 個の質点がバネ定数 k バネで互いに連結され、さらに両側からバネ定数 k のバネで壁と連結されている。この 2 個の質点の x 軸方向の平衡位置からのずれをそれぞれ x_1、x_2 とするとき、
   (a) ニュートン方程式を求めよ。(x 軸方向の運動のみを考える。)
   (b) 規準振動を求めよ。また、それらはどのような運動に対応しているか？
   (c) 初期条件を $t = 0$ で $x_1 = A$、$x_2 = 0$、$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ とするとき、バネの運動を求めよ。
   (d) この系に対し、運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー U、ラグランジアン L を求め、ラグランジュの運動方程式が、(a) で求めたニュートン方程式と一致することを確かめよ。