平成 13 年 4 月 25 日

物理科学セミナーB　演習問題　3

1. 重積分に対して以下を示せ。

(a) 2 次元デカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に座標変換するとき

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr\,d\theta$$

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} g(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int_0^R g(r)\,2\pi r\,dr$$

(b) 3 次元デカルト座標 (x, y, z) から極座標 (r, θ, φ) に座標変換するとき

$$\iiint h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint h(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \rho(r)\,4\pi r^2\,dr$$

2. 次の積分を計算せよ。

(a) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ z>0}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

3. 密度が一様な半球 $0 < z < \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ がある。この半球の重心の座標および z 軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

4. $y = f(x)$　$(a < x < b)$ で与えられる曲線を x 軸まわりに回転してできる回転面の面積 S は

$$S = \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

で求められることを説明せよ。またこれを用いて、半径 R の球の表面積および懸垂線 $y = (e^x + e^{-x})/2$　$(-a < x < a)$ を回転して得られる回転面の面積を求めよ。

5.

(a) 次の二次元ポテンシャル $V(x, y)$ に対して等ポテンシャル線および 力 $(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y})$ を求め、それらの概略を図示せよ。

i. $V(x,y) = x^2 + y^2$

ii. $V(x,y) = x^2 - y^2$

iii. $V(x,y) = x^2 - y$

(b) 力線とは各点での接線方向がその点での力の方向と一致する曲線のことである。この曲線のみたすべき微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial x}}$$

である。なぜか説明せよ。また、これを用いて上の 3 種類のポテンシャルに対して力線を求め、それらの概略を図示せよ。