平成 13 年 5 月 23 日

物理科学セミナーB　演習問題　7

1. $\varphi(r)$ が r だけの関数であるとき、以下を示せ。
 (a) 2 次元空間でのラプラシアン $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ に対して、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ であるとき、

$$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\varphi(r)}{dr}\Big)$$

 (b) 3 次元空間でのラプラシアン $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ に対して、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるとき、

$$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{d\varphi(r)}{dr}\Big)$$

2. 電荷密度 $\rho(\vec{r})$ と静電ポテンシャル $\varphi(\vec{r})$ の間には、ポアッソンの方程式 $\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$ が成り立つ。このことを用いて、半径 R の球の内部に電荷 Q が一様に分布する場合について、静電ポテンシャル $\varphi(\vec{r})$ および電場 $\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\varphi(\vec{r})$ を求めよ。

3. 次の $x(t)$ に対する 2 階微分方程式を解け。
 (a) $x'' + 9x = 0$
 (b) $x'' - 5x' + 6x = 0$
 (c) $x'' - 6x' + 9x = 0$
 (d) $x'' - 2x' + 5x = \sin t$
 (e) $x'' - 3x' + 2x = 3t + 4$

4. 2 階微分方程式、

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dy(t)}{dt} + q(t)y(t) = 0$$

 の一つの解 $y_1(t)$ が分かっているとする。このとき、
 (a) もう一つの独立な解を $y_2(t) = c(t)y_1(t)$ と置くと、$c(t)$ の満たす微分方程式は

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + (2\frac{d\log y(t)}{dt} + p(t))\frac{dc(t)}{dt} = 0$$

 であることを示せ。
 (b) 上の $c(t)$ に対する微分方程式を解くことにより、$y_2(t)$ が以下の形に書けることを示せ。

$$y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{\exp[-\int^s p(u)\,du]}{[y_1(s)]^2}\,ds$$

 (c) 上の結果を用い、次の 2 階微分方程式の一つの解から第 2 の解を求めよ。
  i)　$y'' + 4y' + 4y = 0$　　$(y_1(t) = e^{-2t})$
  ii)　$y'' + (1/t)y' - (m/t)^2y = 0$　　$(y_1(t) = t^m)$