平成 13 年 6 月 6 日

物理科学セミナーＢ　演習問題　9

1. $y(x)$ についての微分方程式 $y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0$ は変換

$$y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int A(x)\,dx}$$

によって 1 階微分の項を含まない次のような $u(x)$ についての微分方程式

$$u''(x) + [B(x) - \frac{1}{2}A'(x) - \frac{1}{4}A^2(x)]u(x) = 0$$

に置き換えることができることを示せ。また、これを用いて微分方程式

$$y''(x) + 2xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

を解け。

2. バネ定数 k のバネで結ばれた質量 m の質点に、その速度に比例した比例係数 γ の摩擦力が働いているとするとき、この質点の釣り合いの位置からの変位を $x(t)$ とすると、運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

と表される。

(a) この運動方程式の一般解を求めよ。k、m、γ の関係によって解の振るまいは異なるが、その振るまいはどのようなものであるか説明せよ。

(b) この系に外から強制力 $F = F_0 \sin\omega t$ が作用するとき、($\gamma^2 < 4mk$ とする）この運動方程式の一般解を求めよ。

3. いま、$y_1(x)$、$y_2(x)$ が微分方程式 $y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0$ の互いに独立な解であるとする。このとき、

(a) 定数変化法を用いことにより、$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f(x)$ の解が

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) - y_1(x)\int\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx + y_2(x)\int\frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx$$

であることを示せ。ここで、$W(y_1, y_2)$ は Wronski の行列式であり、$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$ である。

(b) 上の結果を用いて、

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$$

を解け。(ヒント：右辺 $= 0$ としたとき、上の微分方程式は互いに独立な解 $y_1(x) = x$、$y_2(x) = e^x$ を持つ。)