平成 14 年 4 月 11 日

電磁気学演習 No.1 (ベクトル、多重積分の復習)

問 1 (ベクトル)* 以下のベクトル関係式を証明せよ.

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

問 2 (線積分)* 長さ L の棒がある. この棒の線密度 (すなわち, 単位長さ当たりの質量)λ は棒の片端からの距離 x の関数として,

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 (x/L)^2$$

で与えられている. この棒の質量を求めよ. ただし, λ_0, λ_1 は定数である.

問 3 (面積分)* 半径 R の薄い円盤がある. この円盤の面密度（すなわち，単位面積当たりの質量）σ は円盤の中心からの距離 r の関数として,

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp\Big[\Big(\frac{r}{R}\Big)^2\Big]$$

で与えられている. この円盤の質量を求めよ。ただし, σ_0, σ_1 は定数である.

問 4 (ベクトル)** ベクトル $\boldsymbol{B}$ をベクトル $\boldsymbol{A}$ に平行なベクトルと垂直なベクトルの和で書き表わすと以下のようになることを示せ.

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{A^2}\boldsymbol{A} + \frac{(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{A}}{A^2}$$

問 5 (体積積分)** 密度が一様な半球 $0 < z < \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ がある。この半球の重心の座標および z 軸まわりの慣性モーメントを求めよ.

---

1) 星 (*) 印の数は問題の難易度を表しています. 星 1 つの問題は全員必ず解いて欲しい問題です. 星 2 つ以上はより難しい問題で, 余裕があれば解いて欲しい問題です. 星の数が多いほど, 評価は高くなります.

2) 問題の解答はレポートとして <u>次週水曜日午後 5 時まで</u> に提出して下さい. 先端研 307W のドアにレポート提出用の袋が設置してありますから, そこに入れてください. (電磁気学 I の宿題も忘れずに！)

3) 成績はレポート, 期末試験, 電磁気学 I の宿題で評価します.

(資料) 座標変換 $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ によって, 座標系 (x,y) から座標系 (u,v) に移るとき, 座標系 (x,y) での領域 D が座標系 (u,v) では D' に対応するとすれば,

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F\left(f(u,v),\ g(u,v)\right)\ J(u,v)\,du\,dv$$

ここで $J(u,v)$ はヤコビアンあるいはヤコブの行列式と呼ばれ,

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

例えば, 2 次元デカルト座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に座標変換するとき ($x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$),

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr\,d\theta$$
$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} g(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int_0^R g(r)\,2\pi r\,dr$$

が成り立つのを容易に示せる. （確かめよ！またこの関係の幾何学意味を考えてみよ.）

同様に 3 次元空間における座標変換 $x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w)$ に対して,

$$\iint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} F\left(f(u,v,w),\ g(u,v,w),\ h(u,v,w)\right)\ J(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

であり, ここで $J(u,v,w)$ は

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

である.　3 次元デカルト座標 (x,y,z) から極座標 (r,θ,ϕ) に座標変換 ($x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$) するとき,

$$\iiint_D h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} h(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \rho(r)\,4\pi r^2\,dr\ .$$

上の関係を幾何学的に説明せよ.