

電磁気学演習 No.2 (ベクトル解析の復習)

問 1* 次の等式を証明せよ.

$$(a) \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})f$$

$$(b) \nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})f$$

$$(c) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

問 2* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるとき以下を計算せよ.

$$(a) \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

$$(b) \nabla f(r)$$

$$(c) \nabla \times (\mathbf{r}f(r))$$

$$(d) \nabla^2 f(r)$$

問 3* ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ に対して, x -, y -および z -軸を 3 辺とする一辺の長さ a の立方体の内部に対する積分 $\iiint \nabla \cdot \mathbf{A} dV$ とその表面に対する積分 $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ を実行し, ガウスの定理が成り立っていることを確かめよ.

問 4** 極座標系 (r, θ, ϕ) に対し,

(a) 第一基本量を求めよ.

(b) 極座標系での微小距離, 体積要素, 勾配, 回転, 発散を求めよ.

(c) スカラー場 $f(\mathbf{r}) = z/r^3$ の勾配を極座標表示で求めよ.

問 5** ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ に対して, $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ なる半球の表面に対する積分 $\iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ とその周である x - y 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ に対する積分 $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を計算し, ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ.

(資料)

(A) 3次元デカルト座標系で i, j, k をそれぞれ $x-, y-, z$ -軸方向の単位ベクトルとすると、スカラー場 $f(x, y, z)$ の勾配 (gradient), ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ の回転 (rotation) および発散 (divergence) は以下のように定義される.

i) 勾配: $\nabla f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$

ii) 回転: $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$
 $= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$

iii) 発散: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

(B) i) g, f をスカラー場, \mathbf{A}, \mathbf{B} をベクトル場とすると以下の公式が成り立つ.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + (\nabla f)g$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})f$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})f$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \text{rot grad} f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{div rot} \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ii) ガウスの定理: V を任意の領域, S をその表面とすると,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

iii) ストークスの定理: S を任意の曲面, C をその周とすると,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

(C) 勾配, 回転, 発散は次のように定義することもできる.

i) 勾配: $\Delta \mathbf{r}$ を微小変位, \mathbf{l} を変位の方向の単位ベクトルとすると,

$$(\nabla f) \cdot \mathbf{l} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \{f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\}.$$

ある点 \mathbf{r} での勾配は, その点での f の単位長さ当たりの変化が最大となる方向を向いており, その絶対値はその方向での単位長さ当たりの f の値の変化を与えている. 勾配の方向は常に $f = \text{一定}$ の面に対して垂直.

ii) 回転: \mathbf{n} を微小な面の単位法線ベクトル, ΔS をその面積, ΔC をその周とすると,

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

ここで, \oint は閉じた曲線に対する線積分を表し, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を \mathbf{A} の C に沿った循環あるいは渦量という. 保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の場合は循環がいかなる閉曲線に対してもゼロであるから, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ が常に成り立つ.

iii) 発散: ΔV を微小領域の体積, ΔS をその表面とすると, 発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

\mathbf{A} を流体の速度場とみなせば, 右辺の積分は単位時間当りの微小領域表面 ΔS から流れ出す流体の体積に対応している.

(D) ¹直交曲線座標系を (u_1, u_2, u_3) とすると, 第一基本量 g_i とは座標 u_i を微小量 δu_i 変化させた時, u_i 方向への位置ベクトルの移動距離 δs_i が, $\delta s_i = g_i \delta u_i$ と書ける量である. 例えば, 座標点 (u_1, u_2, u_3) と座標点 $(u_1 + \delta u_1, u_2, u_3)$ の間の距離は $g_1 \delta u_1$ である. 第一基本量は, 以下の式から計算できる:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}.$$

\mathbf{e}_i を座標 u_i 方向の単位ベクトル, A_i をベクトル \mathbf{A} の u_i 方向の成分とすると,

i) 微小距離: $ds = \sqrt{(g_1 du_1)^2 + (g_2 du_2)^2 + (g_3 du_3)^2}$

ii) 体積要素: $dV = g_1 g_2 g_3 du_1 du_2 du_3$

iii) 勾配: $\nabla f = \frac{1}{g_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$

iv) 回転: $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 \mathbf{e}_1 & g_2 \mathbf{e}_2 & g_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 A_1 & g_2 A_2 & g_3 A_3 \end{vmatrix}$

v) 発散: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial g_2 g_3 A_1}{\partial u_1} + \frac{\partial g_3 g_1 A_2}{\partial u_2} + \frac{\partial g_1 g_2 A_3}{\partial u_3} \right)$

¹ 「物理応用数学演習」(共立出版) 2.3 章を参照