平成 14 年 5 月 2 日

電磁気学演習 No.4 (静電ポテンシャル, デルタ関数)

問 1 ***(デルタ関数)** 以下で定義される関数 $\delta_\alpha(x)$ について考える.

$$\delta_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \geq 1/\alpha \text{ のとき}) \\ \alpha(1-\alpha|x|) & (|x| < 1/\alpha \text{ のとき}) \end{cases}$$

(a) $\alpha = 1, 2, 4$ の場合に関数 $y = \delta_\alpha(x)$ を図示せよ.

(b) $\Theta_\alpha(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta_\alpha(t)\,dt$ で定義される関数 $\Theta_\alpha(x)$ を求め, その概形を $\alpha = 1, 2, 4$ の場合に図示せよ.

(c) $\alpha \to \infty$ の極限で, 関数 $\delta_\alpha(x)$ はデルタ関数の定義 1), 2) を満足し, 性質 1)-4) も満たしていることを示せ (資料 **A** を参照).

問 2 (円盤状電荷) z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ で電荷が一様に分布している. このとき以下の問いに答えよ.

(a)* z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.

(b)* z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(c)* $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, (a) の結果と一致することを示せ.

(d)** $R \to \infty$ とすると, 円盤は無限に広い平面となる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 3 ***(球殻状電荷)** 原点をその中心とする半径 R の球殻がある. この球殻上に面密度 σ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上の点 $(r, 0, 0)$ での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求めよ.

問 4 ****(線分状電荷)** 一様な線密度 λ の電荷が z 軸上の $-a < z < a$ の範囲の線分上に分布している. 以下の問いに答えよ.

(a) 円柱座標上の点 (r, ϕ, z) における電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\alpha - \sin\beta) \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\beta - \cos\alpha) \end{aligned}$$

となることをクーロンの法則から求めよ. ただし,

$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{z+a}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{z-a}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}$$

である.

(b) 静電ポテンシャルを求め, $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ が (a) の結果と一致することを示せ.

(c) $a \to \infty$ とするとき, 電荷は無限に長い直線上に分布する. このとき作られる電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

(資料)

(A) i) **デルタ関数の定義**

以下の性質を持つ関数を (ディラックの) デルタ関数 (delta function) という.

1) $\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

ii) **デルタ関数の性質**

1) $\delta(x) = \delta(-x)$

2) $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$

3) $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)$

ここで $\Theta(x)$ は階段関数 (step function) と呼ばれ, 以下の様に定義される:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

(B) 演習 **No.3** の**問 3** で $a = q = 1$ としたときの等電位面の x-z 平面での断面を以下に示す. 等電位面は $4\pi\varepsilon_0\phi = -2$ から 0 までを 0.05 間隔で描いている. 等電位面 $4\pi\varepsilon_0\phi = -2, 0.5, 0$ に対応する線はどれか? また, 電気力線を書き加えよ.