平成 14 年 5 月 9 日

電磁気学演習 No.5 (静電ポテンシャル)

問 1 (2 枚の平行円盤) z 軸を中心とし, z 軸と垂直な半径 R の 2 枚の円盤がある. 一方の中心は $z = a/2$ の位置にあり, その電荷密度は一様で σ, もう一方の中心は $z = -a/2$ で電荷密度は $-\sigma$ である.

(a)* z 軸上での電場の z 成分 $E_z(z)$ を求めよ.

(b)* z 軸上での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(c)* $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

(d)** $R \to \infty$ でこの 2 つの円盤は電荷密度 $\pm\sigma$ の 2 枚の平行な広さ無限大の平面になる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それを図示せよ.

問 2 (球状電荷) 原点をその中心とする半径 R の球がある. この球内に電荷密度 ρ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a)* $r > R$ である点における静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求めよ.

(b)* $r < R$ である点における静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求めよ.

(c)* $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(d)** ρ と逆符号の電荷 q を持つ質量 m 質点を球の表面 $(r = R)$ で速度ゼロで放った. この質点はどのような運動をするか? ニュートン方程式をたて, 質点の運動を求めよ. ただし, この質点に作用する力は球内の電荷の作る電場のみであり, 球内の電荷密度はこの質点の運動により変化しないものと仮定する.

問 3 (2 本の直線状電荷) 演習 **No.4** の**問 4** によれば, 無限に長い直線の上に電荷密度 λ で一様に分布する電荷の作るポテンシャル $\Phi(r)$ は直線からの距離を r とすると $\Phi(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r$ で表される. このことを用いて以下の問いに答えよ.

(a)* z 軸に平行な 2 本の直線があり, その一方は点 $(a, 0, 0)$ を通り, 電荷密度 λ であり, もう一方は点 $(-a, 0, 0)$ を通り, 電荷密度 $-\lambda$ であるとする. このとき, この二つの直線状電荷の作る静電ポテンシャルと電場を求めよ.

(b)** 上で求めた静電ポテンシャルの等電位面 $\Phi(\boldsymbol{r}) = C$ を求め, それが z 軸と平行な軸を持つ円筒であることを示せ.

問 4* (球殻状電荷)** 原点を中心とする半径 R の球殻がある. z 軸と半径のなす角を θ とするとき, この球殻上に $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ の電荷密度で電荷が分布している. このとき球殻内の電場を求めよ. (ヒント: 一様な電荷密度 ρ を持ち, その中心が原点から z 方向に $+\delta/2$ だけずれた半径 R の球と電荷密度が $-\rho$ でその中心が $-\delta/2$ ずれた球の作る電場を $\delta \to 0$ の極限で考えてみよ.)