

平成 14 年 5 月 30 日

電磁気学演習 No.8 (境界値問題、導体系)

問 1* (1 次元境界値問題:無限平板) z 軸に垂直な二枚の平板状導体 (厚さは無視できるとする) が $z = 0$ および $z = d$ の位置にある. この二枚の平板状導体の間に電荷密度 $\rho(z) = \alpha z$ の電荷が分布している.

- (a) 二つの平板の静電ポテンシャルがゼロ ($\Phi(0) = \Phi(d) = 0$) のとき, $0 < z < d$ での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ および電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それらを z の関数として図示せよ. また, 二枚の平板の内側表面に誘起される表面電荷密度も求めよ.
- (b) $\Phi(0) = 0$, $z = d$ の平板の内側表面で電場の z 成分が $E_z = 0$ のとき, 二つの平板の間の静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 2* (1 次元境界値問題:極座標) 中心を共有する二つの導体球殻があり, それらの半径を a および b ($b > a$) とする. 外側の導体球は接地されており, その静電ポテンシャルはゼロ, 内側の導体球の表面の電場の r 成分は $E_r = E_0$ である. このとき,

- (a) $b > r > a$ でこの系のポアソン方程式を解くことにより, 静電ポテンシャル, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, 図示せよ.
- (b) 外側の導体球の内側表面の電荷密度 σ を求めよ.
- (c) この 2 つの導体球殻の静電エネルギー U を $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全空間}} E(r)^2 dV$ より計算せよ. (その際, $r > b$ および $r < a$ での電場についても考察せよ.)

問 3* (1 次元境界値問題:円柱座標) 中心軸を共有する半径 a および半径 b の無限に長い円筒導体がある ($b > a$ とする). 外側の導体は接地されており, そのポテンシャルをゼロとする. 一方, 内側の導体のポテンシャルを V とする.

- (a) 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを示せ.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- (b) 中心軸からの距離を R とするとき, $a < R < b$ におけるポテンシャル $\Phi(R)$ と電場 $E_R(R)$ を求め, R の関数として図示せよ.
- (c) このとき, 内側円筒上にある表面電荷密度 σ_a , 外側円筒の内表面にある表面電荷密度 σ_b を求めよ.
- (d) この円筒系の単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ.

問 4** (Poisson 方程式の性質) ポアソン方程式を満たすポテンシャル $\Phi(r)$ が次の性質を持つことを示せ.

- (a) 電荷がない部分では, $\Phi(r)$ は極大にも極小にもならない.
- (b) ある領域内に電荷がなく, その領域の境界で $\Phi(r) = \Phi_0$ となる境界条件が与えられているとき, 領域内の全ての点で $\Phi(r)$ が成り立つ.