平成 15 年 6 月 19 日

電磁気学演習 No.11 (電流と静磁場、微分型アンペールの法則)

問 1 以下の磁場 $\boldsymbol{B}$ を作る電流密度 $\boldsymbol{J}$ をそれぞれ求めよ. ただし B_0, a, α は定数である.

(a) 円柱座標 (r, ϕ, z) において,

$$\boldsymbol{B} = (0, B_0 r/a, 0).$$

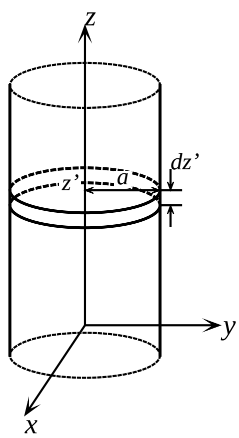
(b) デカルト座標 (x, y, z) において,

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} (B_0, 0, 0) & (y > 0 \text{ のとき}) \\ (-B_0, 0, 0) & (y < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(c) デカルト座標 (x, y, z) において,

$$\boldsymbol{B} = (B_0 \cos(\alpha y), 0, B_0 \sin(\alpha y)).$$

問 2 ***(ソレノイド)** z 軸を中心軸とする無限に長い半径 a の円柱がある. この円柱の表面には表面電荷密度 σ で一様に電荷が分布している. この円柱を z 軸を回転軸として角速度 ω で回転させた. 以下の問いに答えよ.



(a) 円柱を z 方向に微小な長さ dz' をもつ円環に分けて考える. この円環に流れる電流 dI を求めよ.

(b) z 座標が z' の位置にある円環上を流れる電流が原点に作る磁場を求めよ.

(c) 円柱表面に流れる全ての電流が原点に作る磁場を求めよ.

(d) z 軸上全ての点の磁場は原点の磁場と等しい. なぜか? その理由を考えよ.

問 3 ***(回転)** 直交曲線座標系を (u_1, u_2, u_3) とすると, 第一基本量 g_i とは座標 u_i を微小量 δu_i 変化させた時, u_i 方向への位置ベクトルの移動距離 δs_i が, $\delta s_i = g_i \delta u_i$ と書ける量である. 例えば, 座標点 (u_1, u_2, u_3) と座標点 $(u_1 + \delta u_1, u_2, u_3)$ の間の距離は $g_1 \delta u_1$ である. これを用いると回転は以下のように表せることを示せ.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 \boldsymbol{e}_1 & g_2 \boldsymbol{e}_2 & g_3 \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 A_1 & g_2 A_2 & g_3 A_3 \end{vmatrix}$$

また、この結果を用いて、円柱座標系 (R, ϕ, z) で、

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left[\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right] \boldsymbol{e}_R + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right] \boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R A_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right] \boldsymbol{e}_z$$

極座標系 (r,θ,ϕ) で、

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{e}_r \\ &\quad+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

となることを示せ。

問 4 * **(円柱電流)** z 軸からの距離を r とするとき, 電流密度 $\boldsymbol{J}=J_z(r)\boldsymbol{e}_z$ が流れている. ただし, $J_z(r)$ は r の関数である.

(a) このときの磁場 $\boldsymbol{B}$ と $J_z(r)$ との関係式を求めよ.

(b) J_z が一定, すなわち $J_z(r)=J_0$ の場合, 磁場 $\boldsymbol{B}$ を求め, その大きさを r の関数として図示せよ.

(c) 電流密度 $J_z(r)$ が

$$J_z(r)=\begin{cases} J_0(1-(r/a)^2) & (0<r<a) \\ 0 & (a<r)\end{cases}$$

であるとき, 磁場 $\boldsymbol{B}$ を求め, その大きさを r の関数として図示せよ.

問 5 ** **(電気力と磁気力)** 電荷 q の粒子が直線導線と平行に距離 r を隔てて速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている. 導線は単位長さあたり λ の一様な線電荷を持ち, 電流 I を流している. 粒子に働く力を消失させるには, 速度 $\boldsymbol{v}$ をどのように与えればよいか?