平成 15 年 5 月 8 日

**電磁気学演習 No.5 (積分型ガウスの法則とデルタ関数)**

**問 1** $^*$ **(ガウスの法則の応用: 無限円柱)** 半径 $a$ の無限に長い円柱の内部のみに電荷密度 $\rho$(一定) の電荷が分布している. このときの電場と電位を, ガウスの法則を使い円柱の中心軸からの距離の関数として求め, 図示せよ.

**問 2** $^*$**(デルタ関数)** 以下で定義される関数 $\delta_\alpha(x)$ について考える.

$$\delta_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \geq 1/\alpha \text{ のとき}) \\ \alpha(1-\alpha|x|) & (|x| < 1/\alpha \text{ のとき}) \end{cases}$$

(a) $\alpha = 1,\, 2,\, 4$ の場合に関数 $y = \delta_\alpha(x)$ を図示せよ.

(b) $\Theta_\alpha(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta_\alpha(t)\, dt$ で定義される関数 $\Theta_\alpha(x)$ を求め, その概形を $\alpha = 1,\, 2,\, 4$ の場合に図示せよ.

(c) $\alpha \to \infty$ の極限で, 関数 $\delta_\alpha(x)$ はデルタ関数の定義 i), ii) を満足し, 性質 i)-iv) も満たしていることを示せ (資料を参照).

**問 3** $^{**}$ **(ガウスの法則の応用: 無限平板電荷)** 電荷密度が座標 $z$ のみの関数として

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & (|z| \leq z_0) \\ 0 & (|z| > z_0) \end{cases}$$

のように与えられている. (すなわち, 厚み $2z_0$ の無限に広い電荷平板がある.) この電荷の作る電場をガウスの法則を用いて求め, $z$ の関数として図示せよ. さらに, 質量 $m$, 電荷 $-e$ の電子をこの平板の中心から平板に垂直に投げ出すとする. 電子が平板の外に出るためには投げ出す速度 $v$ はどれほどでなければならないか? ただし, $\rho_0 > 0$ として考えよ.

**問 4** $^{**}$**(ガウスの法則の応用: 板状空洞)** 宇宙全体が電荷密度 $\rho$(ただし, $\rho > 0$) に帯電したガスで満たされているとする. だだし, $z = -z_0$ から $z = z_0$ の無限に広がった板状の空間にのみガスがない (真空状態) とする. このとき, 電場と電位を $z$ の関数として求め, 図示せよ. さらに, 質量 $m$, 電荷 $-e$ の電子をこの空洞の中心から空洞面に垂直に投げ出すとする. 電子はどのような運動をするか調べよ.

**問 5** $^*$**(ガウスの法則の応用: 球面状電荷)** 半径 $a$ の球面上に電荷が面電荷密度 $\sigma$ (一定) で一様に分布しているとき, 電場を原点からの距離 $r$ の関数として求め, 図示せよ. さらに, この球内に質量 $m$, 電荷 $-e$ の電子がある場合, 電子はどのような運動をするか考えよ.

**問 6** $^*$**(ガウスの法則の応用: 球)** 半径 $a$ の球内部に電荷密度 $\rho$(一定) の電荷が一様に分布している. このときの電場を原点からの距離 $r$ の関数として求め, 図示せよ. なお, 球の外には電荷は一切存在しないと仮定する.

**(資料)**

## (A) デルタ関数の定義

以下の性質を持つ関数を (ディラックの) デルタ関数 (delta function) という.

i) $\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

## (B) デルタ関数の性質

i) $\delta(x) = \delta(-x)$

ii) $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$

iii) $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)$

ここで $\Theta(x)$ は階段関数 (step function) と呼ばれ, 以下の様に定義される:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

## (C) デルタ関数の例

以下の 3 つの関数はそれぞれ $a \to 0$, $\gamma \to 0$, $\sigma \to 0$ の極限でデルタ関数となる.

i) $f(x) = \begin{cases} 1/a & (|x| \leq a \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > a \text{ のとき}) \end{cases}$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\gamma}{x^2+\gamma^2}$ (ローレンツ分布関数)

iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$ (ガウス分布関数)

i),ii) の関数について、$a \to 0$ および $\gamma \to 0$ の極限で上で示したデルタ関数の定義および性質が満たされていることを確かめてみよ！