平成 15 年 5 月 15 日

**電磁気学演習 No.6 (ガウスの法則と静電エネルギー)**

**問 1** $^*$**(球の静電エネルギー)** 半径 $a$ の球の内部に電荷 $Q$ が一様に分布している. このときの静電エネルギー $U$ を求めよ.

**問 2** $^*$ **(ガウスの法則)** 静電ポテンシャルが原点からの距離 $r$ の関数として, 以下のように与えられているとする.

$$\Phi(r) = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

(a) 電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

(b) 電荷密度 $\rho(r)$ $(r \neq 0)$ を微分型ガウスの法則を用いて求めよ.

(c) 原点に存在する点電荷の電荷を積分型ガウスの法則を用いて求めよ. (ヒント: 原点を中心とする微小な半径の球を考え, これに積分型ガウスの法則を適用し、半径無限小の極限を考えよ.)

(d) この系の全電荷を求めよ.

**問 3** $^*$**(２つの球殻の静電エネルギー)** 中心を共有し, 一様な面電荷密度を持つ 2 つの球殻がある. 一方は電荷 $-Q$ で半径 $a$, 他方は電荷 $+Q$ で半径 $b$ であるとする $(a > b)$. このとき,

(a) 積分型ガウスの法則を用いて, 電場 $\boldsymbol{E}(r)$ を求め, 中心からの距離 $r$ の関数として図示せよ.

(b) 上で求めた電場から, 静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, 図示せよ.

(c) 静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \rho(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})dV$ を計算せよ.

(d) 上で求めた静電エネルギーが $\dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int E(\boldsymbol{r})^2 dV$ と一致することを確かめよ.

**問 4** $^{**}$**(点電荷の静電エネルギー)** 1 辺 $a$ の正三角形の各頂点にそれぞれ負の点電荷 $-q$ が, 中心に正の点電荷 $+Q$ が置かれていて, 各々の点電荷に働く力は互いにつり合っている.

(a) $q$ と $Q$ の間に成り立つ関係式を求め, このような点電荷の静電エネルギーを求めよ. また, その結果を物理的に説明せよ.

(b) 点電荷 $+Q$ の位置が正三角形の中心から 1 つの頂点の方向へ微小な距離 $d$ だけずれたとき, $+Q$ をもとの位置にもどすためのエネルギーを求めよ.

**問 5** $^{**}$**(点電荷の静電エネルギー)** 無限に長い直線上に正負の点電荷 $\pm q$ が交互に並んでいる. 隣り合う電荷間の距離を $a$ とするとき、点電荷１個あたりの静電エネルギーを求めよ.