平成 15 年 5 月 22 日

電磁気学演習 No.7 (境界値問題、導体系)

問 1 ***(1 次元境界値問題:球)**

(a) 極座標におけるラプラシアン (∇^2) の表式が, 極座標における勾配と発散の表式より, 以下のように書けることを示せ.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

(b) 半径 a と半径 b(ただし, $b > a$) の球殻電極がある. 内球のポテンシャルはゼロであり, 外球のポテンシャルは V であるとしよう. このとき電場と電位を球殻の中心からの距離の関数として求め, 図示せよ.

問 2 ***(1 次元境界値問題:無限平板)** z 軸に垂直な二枚の平板状導体 (厚さは無視できるとする) が $z = 0$ および $z = d$ の位置にある. この二枚の平板状導体の間に電荷密度 $\rho(z) = \alpha z$ の電荷が分布している.

(a) 二つの平板の静電ポテンシャルがゼロ ($\Phi(0) = 0, \Phi(d) = 0$) のとき, $0 < z < d$ での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ および電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それらを z の関数として図示せよ. また, 二枚の平板の内側表面に誘起される表面電荷密度も求めよ.

(b) $\Phi(0) = 0$, $z = d$ の平板の内側表面で電場の z 成分が $E_z = 0$ のとき, 二つの平板の間の静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 3 * **(1 次元境界値問題:球)** 中心を共有する二つの導体球殻があり, それらの半径を a および b ($b > a$) とする. 外側の導体球は接地されており, その静電ポテンシャルはゼロ, 内側の導体球の表面の電場の r 成分は $E_r = E_0$ である. このとき,

(a) $b > r > a$ でこの系のポアソン方程式を解くことにより, 静電ポテンシャル, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, 図示せよ.

(b) 外側の導体球の内側表面の電荷密度 σ を求めよ.

(c) この 2 つの導体球殻の静電エネルギー U を $U = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_{\text{全空間}} E(\boldsymbol{r})^2 dV$ より計算せよ. (その際, $r > b$ および $r < a$ での電場についても考察せよ.)

問 4 * **(1 次元境界値問題:円柱座標)** 中心軸を共有する半径 a および半径 b の無限に長い円筒導体がある ($b > a$ とする). 外側の導体は接地されており. そのポテンシャルをゼロとする. 一方、内側の導体のポテンシャルを V とする.

(a) 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを示せ.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R\frac{\partial f}{\partial R}\Big) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(b) 中心軸からの距離を R とするとき, $a < R < b$ におけるポテンシャル $\Phi(R)$ と電場 $E_R(R)$ を求め, R の関数として図示せよ.

(c) このとき, 内側円筒上にある表面電荷密度 σ_a, 外側円筒の内表面にある表面電荷密度 σ_b を求めよ.

(d) この円筒系の単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ.

問 5 ****(Poisson 方程式の性質)** ポアソン方程式を満たすポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{r})$ が次の性質を持つことを示せ.

(a) 電荷がない部分では, $\Phi(\boldsymbol{r})$ は極大にも極小にもならない.

(b) ある領域内に電荷がなく, その領域の境界で $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0$ でなる境界条件が与えられているとき, 領域内の全ての点で $\Phi(\boldsymbol{r})$ が成り立つ.