平成 16 年 5 月 6 日

電磁気学演習 No.3 (ベクトル解析の復習)

問 1* 次の等式を証明せよ.

(a) $\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})f$

(b) $\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A})f$

(c) $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

問 2* $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるとき以下を計算せよ.

(a) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$

(b) $\nabla f(r)$

(c) $\nabla \times (\boldsymbol{r} f(r))$

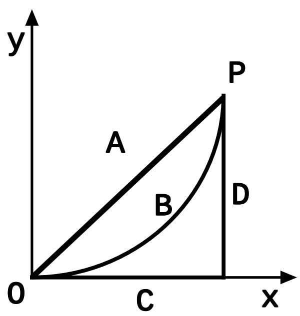
(d) $\nabla^2 f(r)$

問 3* ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ に対して, x-, y-および z-軸を 3 辺とする一辺の長さ a の立方体の内部に対する積分 $\iiint \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$ とその表面に対する積分 $\iint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を実行し, ガウスの定理が成り立っていることを確かめよ.

問 4* 2 次元空間で定義された力 $\boldsymbol{F} = (2xy, \alpha x^2)$ (α は定数) に対して,

(a) 右図に示すような 3 つの経路, すなわち直線 O→A→P, 円弧 O→B→P ($y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$), 折れ線 O→C→D →P, を通って質点が点 O$(0, 0)$ から点 P(a, a) に移動するときの仕事をそれぞれの経路について求めよ.

(b) α がいかなる値のとき, 力 $\boldsymbol{F}$ は保存力か? また、そのときのポテンシャルを求めよ.



問 5** ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ に対して, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ なる半球の表面に対する積分 $\iint (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ とその周である x-y 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ に対する積分 $\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算し, ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ.

(資料)

(A) 3次元デカルト座標系で $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x-, y-, z-軸方向の単位ベクトルとすると, スカラー場 $f(x,y,z)$ の勾配 (gradient), ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転 (rotation) および発散 (divergence) は以下のように定義される.

i) **勾配:** $\nabla f = \mathrm{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$

ii) **回転:**
$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}$$

iii) **発散:** $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

(B) i) g, f をスカラー場, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をベクトル場とすると以下の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\nabla(fg) = f\nabla g + (\nabla f)g \\
&\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})f \\
&\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A})f \\
&\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&\nabla \times (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \\
&\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&\nabla\times(\nabla f) = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad} f = 0 \\
&\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0 \\
&\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

ii) **ガウスの定理:** V を任意の領域, S をその表面とすると,

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$$

iii) **ストークスの定理:** S を任意の曲面, C をその周とすると,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$

(C) 勾配, 回転, 発散は次のように定義することもできる.

i) **勾配:** $\Delta\boldsymbol{r}$ を微小変位, $\boldsymbol{l}$ を変位の方向の単位ベクトルとすると,

$$(\nabla f)\cdot\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r})\right\}.$$

ある点 $\boldsymbol{r}$ での勾配は, その点での f の単位長さ当たりの変化が最大となる方向を向いており, その絶対値はその方向での単位長さ当たりの f の値の変化を与えている. 勾配の方向は常に $f=$一定の面に対して垂直.

ii) **回転:** $\boldsymbol{n}$ を微小な面の単位法線ベクトル, ΔS をその面積, ΔC をその周とすると,

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Delta C}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで, $\oint$ は閉じた曲線に対する線積分を表し, $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{A}$ の C に沿った循環あるいは渦量という. 保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の場合は循環がいかなる閉曲線に対してもゼロであるから, $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$が常に成り立つ.

iii) **発散:** ΔV を微小領域の体積, ΔS をその表面とすると, 発散は,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

$\boldsymbol{A}$ を流体の速度場とみなせば, 右辺の積分は単位時間当りの微小領域表面 ΔS から流れ出す流体の体積に対応している.

(D) [1]直交曲線座標系を (u_1,u_2,u_3) とすると, 第一基本量 g_i とは座標 u_i を微小量 δu_i 変化させた時, u_i 方向への位置ベクトルの移動距離 δs_i が, $\delta s_i = g_i\delta u_i$ と書ける量である. 例えば, 座標点 (u_1,u_2,u_3) と座標点 $(u_1+\delta u_1,u_2,u_3)$ の間の距離は $g_1\delta u_1$ である. 第一基本量は, 以下の式から計算できる:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}.$$

$\boldsymbol{e}_i$ を座標 u_i 方向の単位ベクトル, A_i をベクトル $\boldsymbol{A}$ の u_i 方向の成分とすると,

i) **微小距離:** $ds = \sqrt{(g_1du_1)^2+(g_2du_2)^2+(g_3du_3)^2}$

ii) **体積要素:** $dV = g_1g_2g_3\,du_1du_2du_3$

iii) **勾配:** $\nabla f = \dfrac{1}{g_1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{1}{g_2}\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{g_3}\dfrac{\partial f}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3$

iv) **回転:** $\nabla\times\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1g_2g_3}\begin{vmatrix} g_1\boldsymbol{e}_1 & g_2\boldsymbol{e}_2 & g_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1A_1 & g_2A_2 & g_3A_3 \end{vmatrix}$

v) **発散:** $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1g_2g_3}\left(\dfrac{\partial g_2g_3A_1}{\partial u_1} + \dfrac{\partial g_3g_1A_2}{\partial u_2} + \dfrac{\partial g_1g_2A_3}{\partial u_3}\right)$

[1]「物理応用数学演習」(共立出版) **2.3** 章を参照