平成 16 年 5 月 13 日

電磁気学演習 No.4 (静電ポテンシャル, クーロンの法則)

問 1 * x 軸上のある点 $\boldsymbol{r}_1 = (a, 0, 0)$ に点電荷 $q(>0)$ が, また $\boldsymbol{r}_2 = (-a, 0, 0)$ に点電荷 $-q$ がある。以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上の電場 $\boldsymbol{E}$ をクーロンの法則より求めよ.

(b) x 軸を含む平面における電気力線の大まかな形状を図示せよ.

(c) 任意の点 (x, y, z) の電位 Φ を求めよ.

(d) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より z 軸上の電場 $\boldsymbol{E}$ を再び求めよ.

問 2 ***(円環状電荷)*** z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 a の円周上に線電荷密度 λ の電荷が一様に分布している. このとき, 以下の問に答えよ.

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求め, z の関数として図示せよ.

(b) z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

(c) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, (a) の結果と一致することを示せ.

(d) z 軸上で電場の大きさが最大となる点を求め, その点における電場の大きさを求めよ.

問 3 (円盤状電荷) z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ で電荷が一様に分布している. このとき以下の問いに答えよ.

(a)* z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.

(b)* z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(c)* $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, (a) の結果と一致することを示せ.

(d)* z 軸上における電場の z 成分 E_z を z の関数として図示せよ. さらに, z 軸上で電場の大きさが最大となる点を求め, その点における電場の大きさを求めよ.

(e)** $R \to \infty$ とすると, 円盤は無限に広い平面となる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 4 ***(球殻状電荷)*** 原点をその中心とする半径 R の球殻がある. この球殻上に面密度 σ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上の点 $(r, 0, 0)$ での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求めよ.

問 5 ****(線分状電荷)*** 一様な線密度 λ の電荷が z 軸上の $-a < z < a$ の範囲の線分上に分布している. 以下の問いに答えよ.

(a) 円柱座標上の点 (r, ϕ, z) における電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\alpha - \sin\beta) \\
E_\phi &= 0 \\
E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\beta - \cos\alpha)
\end{aligned}
$$

となることをクーロンの法則から求めよ. ただし,

$$
\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}},
$$
$$
\sin\alpha = \frac{z+a}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}}
$$

である.

(b) 静電ポテンシャルを求め, $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ が (a) の結果と一致することを示せ.

(c) $a \to \infty$ とするとき, 電荷は無限に長い直線上に分布する. このとき作られる電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.