

平成 16 年 5 月 20 日

電磁気学演習 No.5 (静電エネルギーとポアソン方程式の境界値問題)

問 1 (電気双極子) 点電荷 $-q$ が原点にあり, 点電荷 q が位置ベクトル \mathbf{d} にある.

- (a)** この 2 つの点電荷の距離に比べて遠く離れた任意の点 \mathbf{r} ($d \ll r$) におけるポテンシャルが以下で与えられることを示せ.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}$$

- (b)* 上のポテンシャルより, 電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3} \right)$$

となることを示せ.

問 2 (静電エネルギー)

- (a)* 半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している. このときの静電エネルギー U を求めよ.
- (b)** 無限に長い直線上に正負の点電荷 $\pm q$ が交互に並んでいる. 隣り合う電荷間の距離を a とするとき, 点電荷 1 個あたりの静電エネルギーを求めよ.

問 3*(1次元境界値問題:球)

- (a) 極座標におけるラプラシアン (∇^2) の表式が, 極座標における勾配と発散の表式より, 以下のように書けることを示せ.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

- (b) 半径 a と半径 b (ただし, $b > a$) の球殻電極がある. 内球のポテンシャルはゼロであり, 外球のポテンシャルは V であるとしよう. このとき電場と電位を球殻の中心からの距離の関数として求め, 図示せよ.

問 4*(1次元境界値問題:無限平板) z 軸に垂直な二枚の平板状導体 (厚さは無視できるとする) が $z = 0$ および $z = d$ の位置にある. この二枚の平板状導体の間に電荷密度 $\rho(z) = \alpha z$ の電荷が分布している.

- (a) 二つの平板の静電ポテンシャルがゼロ ($\Phi(0) = 0, \Phi(d) = 0$) のとき, $0 < z < d$ での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ および電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それらを z の関数として図示せよ. また, 二枚の平板の内側表面に誘起される表面電荷密度も求めよ.
- (b) $\Phi(0) = 0, z = d$ の平板の内側表面で電場の z 成分が $E_z = 0$ のとき, 二つの平板の間の静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 5* (1次元境界値問題:円柱座標) 中心軸を共有する半径 a および半径 b の無限に長い円筒導体がある ($b > a$ とする). 外側の導体は接地されており. そのポテンシャルをゼロとする. 一方、内側の導体のポテンシャルを V とする.

- (a) 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを示せ.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- (b) 中心軸からの距離を R とするとき, $a < R < b$ におけるポテンシャル $\Phi(R)$ と電場 $E_R(R)$ を求め, R の関数として図示せよ.
- (c) このとき, 内側円筒上にある表面電荷密度 σ_a , 外側円筒の内表面にある表面電荷密度 σ_b を求めよ.
- (d) この円筒系の単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ.