平成 16 年 6 月 3 日

電磁気学演習 No.7 (中間テスト)

問 1 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, であるとき以下を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{a}$ は定数ベクトルである.

(a) $\nabla \exp(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$

(b) $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \exp(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}))$

(c) $\nabla^2 \exp(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$

問 2 z 軸を中心軸とし，$x - y$ 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ の電荷が一様に分布している．このとき，以下の問に答えよ．

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ．

(b) z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ．

(c) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より，z 軸上における電場の z 成分 E_z を求め，(a) の答えと一致することを示せ．

(d) $R \to \infty$ とすると，円盤は無限に広い平面となる．このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め，z の関数として図示せよ．

問 3 半径 a の球内部に電荷 Q が一様に分布している．

(a) 電荷密度を求めよ．

(b) ガウスの法則を用いて電場 $\boldsymbol{E}$ を求め，その大きさを中心からの距離 r の関数として図示せよ．

(c) 静電ポテンシャル Φ を求め，r の関数として図示せよ．ただし，静電ポテンシャルは無限遠でゼロとする．

(d) 静電エネルギー U を求めよ．

問 4 中心軸を共有する半径 a および半径 b の無限に長い円筒導体がある ($b > a$ とする). 外側の導体は接地されており. そのポテンシャルをゼロとする. 一方、内側の導体のポテンシャルを V とする.

(a) 中心軸からの距離を R とするとき, $a < R < b$ におけるポテンシャル $\Phi(R)$ と電場 $E_R(R)$ を求め, R の関数として図示せよ. なお, 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを用いてよい.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R\frac{\partial f}{\partial R}\Big) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(b) このとき, 内側円筒上にある表面電荷密度 σ_a, 外側円筒の内表面にある表面電荷密度 σ_b を求めよ.

(c) この円筒系をコンデンサーとみなすとき, z 軸方向の単位長さ当たりの電気容量を求めよ.