

## 電磁気学演習 No.2 (ベクトル解析の復習)

問 1\* 次の等式を証明せよ.

- (a)  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})f$   
 (b)  $\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})f$   
 (c)  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

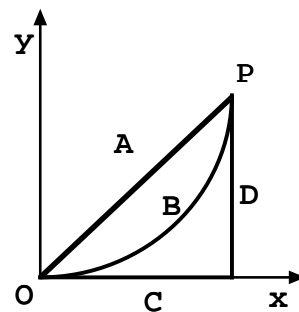
問 2\*  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であるとき以下を計算せよ.

- (a)  $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$   
 (b)  $\nabla f(r)$   
 (c)  $\nabla \times (\mathbf{r}f(r))$   
 (d)  $\nabla^2 f(r)$

問 3\* ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  に対して,  $x$ -,  $y$ -および  $z$ -軸を 3 辺とする一辺の長さ  $a$  の立方体の内部に対する積分  $\iiint \nabla \cdot \mathbf{A} dV$  とその表面に対する積分  $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  を実行し, ガウスの定理が成り立っていることを確かめよ.

問 4\* 2次元空間で定義された力  $\mathbf{F} = (2xy, \alpha x^2)$  ( $\alpha$  は定数) に対して,

- (a) 右図に示すような 3 つの経路, すなわち直線  $O \rightarrow A \rightarrow P$ , 円弧  $O \rightarrow B \rightarrow P$  ( $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ ), 折れ線  $O \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow P$ , を通って質点が点  $O(0, 0)$  から点  $P(a, a)$  に移動するときの仕事をそれぞれの経路について求めよ.  
 (b)  $\alpha$  がいかなる値のとき, 力  $\mathbf{F}$  は保存力か? また, そのときのポテンシャルを求めよ.



問 5\*\* ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  に対して,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  なる半球の表面に対する積分  $\iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$  とその周である  $x$ - $y$  平面上の円  $x^2 + y^2 = 1$  に対する積分  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を計算し, ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ.

(資料)

(A) 3次元デカルト座標系で  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  をそれぞれ  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -軸方向の単位ベクトルとすると, スカラー場  $f(x, y, z)$  の勾配 (gradient), ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z)$  の回転 (rotation) および発散 (divergence) は以下のように定義される.

i) 勾配:  $\nabla f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$

ii) 回転:  $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$   
 $= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$

iii) 発散:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

(B) i)  $g, f$  をスカラー場,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をベクトル場とすると以下の公式が成り立つ.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + (\nabla f)g$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})f$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})f$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \text{rot grad} f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{div rot} \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ii) **ガウスの定理:**  $V$  を任意の領域,  $S$  をその表面とすると,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

iii) **ストークスの定理:**  $S$  を任意の曲面,  $C$  をその周とすると,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

(C) 勾配, 回転, 発散は次のように定義することもできる.

i) **勾配:**  $\Delta \mathbf{r}$  を微小変位,  $\mathbf{l}$  を変位の方向の単位ベクトルとすると,

$$(\nabla f) \cdot \mathbf{l} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \{f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\}.$$

ある点  $\mathbf{r}$  での勾配は, その点での  $f$  の単位長さ当たりの変化が最大となる方向を向いており, その絶対値はその方向での単位長さ当たりの  $f$  の値の変化を与えている. 勾配の方向は常に  $f = \text{一定}$  の面に対して垂直.

ii) **回転:**  $\mathbf{n}$  を微小な面の単位法線ベクトル,  $\Delta S$  をその面積,  $\Delta C$  をその周とすると,

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

ここで,  $\oint$  は閉じた曲線に対する線積分を表し,  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  を  $\mathbf{A}$  の  $C$  に沿った循環あるいは渦量という. 保存力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の場合は循環がいかなる閉曲線に対してもゼロであるから,  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  が常に成り立つ.

iii) **発散:**  $\Delta V$  を微小領域の体積,  $\Delta S$  をその表面とすると, 発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

$\mathbf{A}$  を流体の速度場とみなせば, 右辺の積分は単位時間当りの微小領域表面  $\Delta S$  から流れ出す流体の体積に対応している.

(D) <sup>1</sup>直交曲線座標系を  $(u_1, u_2, u_3)$  とすると, 第一基本量  $g_i$  とは座標  $u_i$  を微小量  $\delta u_i$  変化させた時,  $u_i$  方向への位置ベクトルの移動距離  $\delta s_i$  が,  $\delta s_i = g_i \delta u_i$  と書ける量である. 例えば, 座標点  $(u_1, u_2, u_3)$  と座標点  $(u_1 + \delta u_1, u_2, u_3)$  の間の距離は  $g_1 \delta u_1$  である. 第一基本量は, 以下の式から計算できる:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}.$$

$\mathbf{e}_i$  を座標  $u_i$  方向の単位ベクトル,  $A_i$  をベクトル  $\mathbf{A}$  の  $u_i$  方向の成分とすると,

i) **微小距離:**  $ds = \sqrt{(g_1 du_1)^2 + (g_2 du_2)^2 + (g_3 du_3)^2}$

ii) **体積要素:**  $dV = g_1 g_2 g_3 du_1 du_2 du_3$

iii) **勾配:**  $\nabla f = \frac{1}{g_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$

iv) **回転:**  $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 \mathbf{e}_1 & g_2 \mathbf{e}_2 & g_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 A_1 & g_2 A_2 & g_3 A_3 \end{vmatrix}$

v) **発散:**  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left( \frac{\partial g_2 g_3 A_1}{\partial u_1} + \frac{\partial g_3 g_1 A_2}{\partial u_2} + \frac{\partial g_1 g_2 A_3}{\partial u_3} \right)$

<sup>1</sup> 「物理応用数学演習」(共立出版) 2.3 章を参照