平成 17 年 5 月 19 日

電磁気学演習 No.5 (静電ポテンシャル, クーロンの法則)

問 1 ***(デルタ関数)** 以下で定義される関数 $\delta_\alpha(x)$ について考える.

$$\delta_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \geq 1/\alpha \text{ のとき}) \\ \alpha(1-\alpha|x|) & (|x| < 1/\alpha \text{ のとき}) \end{cases}$$

(a) $\alpha = 1,\, 2,\, 4$ の場合に関数 $y = \delta_\alpha(x)$ を図示せよ.

(b) $\Theta_\alpha(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta_\alpha(t)\, dt$ で定義される関数 $\Theta_\alpha(x)$ を求め, その概形を $\alpha = 1,\, 2,\, 4$ の場合に図示せよ.

(c) $\alpha \to \infty$ の極限で, 関数 $\delta_\alpha(x)$ はデルタ関数の定義 i), ii) を満足し, 性質 i)-iv) も満たしていることを示せ (資料を参照).

問 2 ***(1 次元境界値問題:球状電荷)**

(a) 極座標におけるラプラシアン (∇^2) の表式が, 極座標における勾配と発散の表式より, 以下のように書けることを示せ. (電磁気学演習 No. 2 の資料を参照せよ.)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

(b) 半径 a の球がある. 球内部では一様な電荷密度 ρ で電荷が分布しており、外部には電荷がないとする. このとき, ポアッソン方程式を解くことにより, この系の静電ポテンシャル $\varphi(r)$ を求め, 球の中心からの距離 r の関数として図示せよ.

(c) $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$ から, この球状電荷の作る電場 $\boldsymbol{E}$ を求め, 図示せよ.

(d) $U = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int E(\boldsymbol{r})^2 dV$ を用いて, この球状電荷の静電エネルギー U を求めよ.

問 3 ***(1 次元境界値問題:球殻電荷)** 真空中に半径 a と半径 b(ただし, $b > a$) の球殻電極がある. 内球の静電ポテンシャルはゼロであり, 外球の静電ポテンシャルは V であるとしよう. このとき静電ポテンシャルと電場を球殻の中心からの距離の関数として求め, 図示せよ.

問 4 ***(1 次元境界値問題:無限平板)** z 軸に垂直な二枚の平面 $z = 0$ および $z = d$ の間に一様な電荷密度 ρ の電荷が分布している.

(a) 二つの平面の静電ポテンシャルがゼロ ($\Phi(0) = 0, \Phi(d) = 0$) のとき, $0 < z < d$ での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ および電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それらを z の関数として図示せよ.

(b) $\Phi(0) = 0$, $z = d$ の平面の内側表面で電場の z 成分が $E_z = 0$ のとき, 二つの平板の間の静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 5 ***(1 次元境界値問題:円柱座標)** 真空中に中心軸を共有する半径 a および半径 b の無限に長い円筒導体がある ($b > a$ とする). 外側の導体は接地されており. そのポテンシャルをゼロとする. 一方、内側の導体のポテンシャルを V とする.

(a) 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを示せ. (電磁気学演習 No. 2 の資料を参照せよ.)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(R\frac{\partial f}{\partial R}\Big) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(b) 中心軸からの距離を R とするとき, $a < R < b$ におけるポテンシャル $\Phi(R)$ と電場 $E_R(R)$ を求め, R の関数として図示せよ.

(c) この円筒系の単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ.

(資料)

(A) デルタ関数の定義

以下の性質を持つ関数を (ディラックの) デルタ関数 (delta function) という.

i) $\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

(B) デルタ関数の性質

i) $\delta(x) = \delta(-x)$

ii) $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$

iii) $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)$

ここで $\Theta(x)$ は階段関数 (step function) と呼ばれ, 以下の様に定義される:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

(C) デルタ関数の例

以下の 3 つの関数はそれぞれ $a \to 0$, $\gamma \to 0$, $\sigma \to 0$ の極限でデルタ関数となる.

i) $f(x) = \begin{cases} 1/a & (|x| \leq a \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > a \text{ のとき}) \end{cases}$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\gamma}{x^2 + \gamma^2}$ (ローレンツ分布関数)

iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$ (ガウス分布関数)

i),ii) の関数について、$a \to 0$ および $\gamma \to 0$ の極限で上で示したデルタ関数の定義および性質が満たされていることを確かめてみよ！