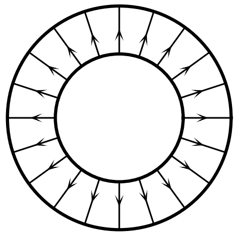
平成 17 年 6 月 2 日

電磁気学演習 No.7 (導体系, 静電容量)

問 1 * **(導体球殻)** 中心を共有する半径 a および半径 b の導体球殻がある ($b > a$ とする). この二つの導体のあいだに右図に示すような電気力線が生じており，それ以外の場所では電場はゼロであるとするとき以下の問いに答えよ.



(a) 定量的に問題を解く前にこの系の電場および静電ポテンシャルを r の関数としてグラフに描け． またどうしてそうなると考えるのかを論理的に説明せよ. グラフの曲率の正負にも注意せよ. さらに導体表面の電荷の符号はどうなるか?

(b) ガウスの法則を用いる方法とポアソン方程式を解く方法の二つの方法で電場および静電ポテンシャルを r の関数として求め, 結果が一致することを確かめよ． ただし, 内側の球殻表面の電場を E_0 とする.

(c) この系の静電エネルギーを求めよ.

(d) この系をコンデンサーとするとき静電容量を求めよ.

問 2 * **(導体平板)** 無限に広い２つの導体平板が距離 d だけ隔てて平行に置かれており, 導線で結ばれているとする. この２つの平板の間に無限に広い一様な面電荷密度 σ を持つプラスチック板 (厚さは無視できるとする) をこれらと平行に挿入する. プラスチック板が導体平板の一つ (これを平板 1, 他方を平板２をと呼ぶことにする) から距離 x だけ離れているとするとき,

(a) 平板１とプラスチック板の間の電場 $\boldsymbol{E}_1$ と平板 2 とプラスチック板の間の電場 $\boldsymbol{E}_2$ を求めよ.

(b) 平板１と平板２の内側表面に誘起される表面電荷の面電荷密度 σ_1, σ_2 を求めよ.

問 3 * **(一様電場中の導体球殻)** z 軸と平行な一様電場 $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_z$ の中にその中心が原点にある半径 a の導体球殻が置かれている. この導体球殻の電位を V とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) 導体球殻の外部の静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ は,

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -E_0 z + \frac{Az}{r^2} + \frac{B}{r}$$

の形で与えられる ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). 係数 A および B を求めよ. また, 球殻内部の静電ポテンシャルはどうか?

(b) この系の作る電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ. また, 球殻表面に誘起される電荷の面電荷密度 σ を求めよ． また, この導体球殻が持つ全電荷を求めよ.

(c) この導体球殻が, 一様電場から受ける力を求めよ.

問 4 *** **(電気映像法: 球＋点電荷)** 接地された半径 a の導体球がある. この球の中心から $r_a(> a)$ 離れた点 A に点電荷 q が置かれている. 以下の問いに答えよ.

(a) 導体の外部におけるポテンシャル Φ と同等の解を与える電気映像はどのようなものか? その位置と電荷の大きさを求めよ.

(b) 導体表面における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

(c) 導体表面の表面電荷密度 σ を求めよ.

(d) 導体表面にある電荷の総量 Q を求めよ.

(e) この電荷を点 A から無限遠まで引き離すのに必要なエネルギーを求めよ.

(f) ガウスの法則を用いる方法とポアソン方程式を解く方法の二つの方法で電場および静電ポテンシャルを r の関数として求め, 結果が一致することを確かめよ. ただし, 内側の球殻表面の電場を E_0 とする.

(g) この系をコンデンサーとするとき静電容量を求めよ.

問 5 * **(コンデンサーの静電容量)** いくつかの導体系の静電容量 C が以下のように与えられることを示せ.

(a) 孤立した半径 a の導体球 (ただし, 無限遠に対してコンデンサーを作ると考えよ)

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

(b) 面積 S, 間隔 d の平行平板コンデンサーで一方の極を絶縁し, 他方を接地した場合

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(c) 内半径 a, 外半径 b の同心球からなるコンデンサーで, 外球を接地した場合

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

(d) 内半径 a, 外半径 b の同心球からなるコンデンサーで, 内球を接地した場合

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{b^2}{b-a}$$

(e) 内半径 a, 外半径 b の同軸円筒からなるコンデンサーで, 外筒を接地した場合（単位長さあたり）

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(b/a)}$$

(f) 半径 a, 間隔 d（ただし, $a << d$）の 2 本の十分長い平行導線（単位長さあたり）

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\log(d/a)}$$